

关于二分图的线连通度的一个结论 A Conclusion on Line-connected Degree of Bipartite Graph

潘登斌

Pan Dengbin

(广西职业技术学院 南宁 530226)
(Guangxi Vocational College, Nanning, 530226)

摘要 在 Chartrand, G 和 Lesniak 关于图的线连通性定理的基础上, 讨论二分图的线连通度问题, 得到结论: 若 $G = (X, Y; E)$ 是二分图, 对任意一对不相邻的点 $u, v, d(u) + d(v) > \lceil p/2 \rceil$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

关键词 二分图 线连通度 不相邻

中图法分类号 O157.5

Abstract Based on the studies of Chartrand G and Lesniak on line-connected theory of graph, the line-connected degree of bipartite graph is discussed. A conclusion is obtained as follows: for any pairs of discontinuous points (u, v) , if $G = (X, Y; E)$ is a bipartite graph, $d(u) + d(v) > \lceil p/2 \rceil$, then $\lambda(G) = \delta(G)$.

Key words bipartite graph, line-connected degree, discontinuous

1 定义和记号

1.1 二分图的定义

设 X, Y 是图 G 的顶点集, 使 $X \cup Y = V(G), X \cap Y = \emptyset$ 且 G 的每一条边的一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 则称 G 为二分图 (Bipartite Graph), X, Y 称为 G 的二分划 (Bipartition).

1.2 记号

若 G 是二分图, X, Y 分别是其二分划, E 是其边集合, 记此二分图为 $G(X, Y; E)$. P 表示 G 的阶数; $V(G)$ 表示 G 的顶点集合, 若 $u \in V(G)$, G 中与 u 关联的边的数目称为 u 在 G 中的度 (Degree), 记为 $d(u)$; $\delta(G)$ 表示 G 中的最小度; $\lambda(G)$ 表示 G 中的线连通度; 若 $x \in V(G)$, 则 $N(x)$ 表示与 x 相邻的点集合; $\lceil c \rceil$ 表示小于或等于 c 的最大整数, $|V|$ 表示集合 V 中元素的个数.

1.3 关于图的线连通性已有结果

关于图的线连通性, Chartrand G 曾给出一个结论: 在 P 阶图 G 中, 若 $\delta(G) \geq \lceil P/2 \rceil$, 则

$\lambda(G) = \delta(G)$; 1974年 Lesniak 得到了一个改进的结果: 若对任一对不相邻的点 u, v ,

$d(u) + d(v) \geq P - 1$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

在 Chartrand G 和 Lesniak 关于图的线连通性定理的基础上, 专门讨论二分图的线连通度问题, 得到以下结论.

2 关于二分图的线连通度的一个结论

定理 若 $G = (X, Y; E)$ 是二分图, 对任意一对不相邻点 $u, v, d(u) + d(v) > [P/2]$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

证明 反证法.

假设 $\lambda < \delta$, 则存在非空点集 $S \subset X \cup Y$, 使得 $(S, \bar{S}) = \lambda < \delta$ (其中 $S = (X \cup Y) - \bar{S}$).

记 $A = S \cap X, B = S \cap Y, C = \bar{S} \cap X, D = \bar{S} \cap Y$,

$|A| = a, |B| = b, |C| = c, |D| = d$,

$|A, D| = \lambda_1, |B, C| = \lambda_2, (\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda)$.

首先, 我们有 A, B, C, D 均非空, 否则不失一般性, 假定 $a = 0$, 则对任意 $y_b \in B$ 有 $\delta \leq N(y_b) \leq \lambda < \delta$, 矛盾. 从而 a, b, c, d 均大于 0.

假定 $a \leq b$, 考虑 B 中顶点的度, 可得

$$b\delta \leq ba + \lambda_2,$$

$$\lambda \leq \delta - 1 \leq a + \lambda_2/b - 1 \leq b + \lambda/b - 1. \quad (1)$$

情形 1: $b \leq 1$, 则 $a = b = 1$, 记 $A = \{x_a\}, B = \{y_b\}$,

$$\delta \leq N(y_b) \leq \lambda_2 + 1 \leq \lambda + 1 < \delta + 1,$$

$$\therefore \lambda = \delta - 1, \lambda_2 = \lambda, \lambda_1 = 0,$$

$$\delta \leq N(x_a) \leq \lambda_1 + 1 = 1,$$

$$\lambda = 0.$$

情形 1.1: 若 $c \leq d$, 对任意 $y_a \in D, x_a$ 与 y_a 不相邻, 且 $d(x_a) + d(y_a) \leq 1 + c \leq [p/2]$, 矛盾.

情形 1.2: 若 $c > d$, 对任意 $x_c \in C, x_c$ 与 y_b 不相邻, 且 $d(y_b) + d(x_c) \leq 1 + d \leq [p/2]$, 矛盾.

情形 2: $b > 1$, 由(1)式

$$(b - 1)(b - \lambda) \geq 0,$$

$$b \geq \lambda.$$

情形 2.1: $b = \lambda$, 由(1)式

$$\lambda \leq a + \lambda_2/b - 1 \leq b + \lambda/b - 1 = \lambda,$$

$$a = b = \lambda = \lambda_2, \lambda_1 = 0.$$

对任意 $x_a \in A$, 有 $\delta \leq |N(x_a)| \leq b = \lambda$, 矛盾;

从而有 $b \geq \lambda + 1$, 则 B 中至少有一点 $y_b \in B$ 与 C 中所有的点都不相邻.

情形 2.2: 若 $c \leq d$, 类似上面情形 1 ~ 情形 2.1 可得

$d \geq \lambda + 1$, D 中至少有一点 $y_d \in D$ 与 A 中所有点都不相邻, 从而

(下转第 48 页)

3.5 采取经济手段, 加强与社区相结合及通过媒体宣传、教育相结合的管理模式

(1) 征收能源、资源使用费, 收取污染治理费, 对于达到环保指标的企业和个人提供经济补贴或减免税收等激励手段, 不达标的重罚; 利用季节性价格调节平衡淡旺季游客数量; 滨海旅游城市的环保投资应高于工业城市; 各景区资源税, 应实行不同税率, 限制景区的集中过度开发。

(2) 旅游开发应考虑到当地社区的长期利益, 共同协作, 利益共享, 使其主动参与到地方政府和旅游企业统一组织的旅游开发、旅游管理中, 营造良好的旅游、投资环境, 也提高了当地居民的生活质量。

(3) 通过媒体的宣传、教育, 使游客及居民的海洋旅游环保意识得到提高, 并对旅游相关部门人员进行环境保护、滨海旅游生态相关知识的培训, 使其建立其可持续发展的旅游观, 这需要旅游局和环保局的密切配合; 另外, 从中小学抓起, 以高等教育机构为主, 增设有关滨海旅游环境、海洋生态旅游及旅游可持续发展等相关内容, 提高旅游管理人员、从业人员的专业知识、技能和意识, 为滨海旅游的可持续发展储备人力资源。

参考文献

- 1 林 鹏. 中国红树林生态系. 北京: 科学出版社, 1997. 130~132.
- 2 梁士楚等. 广西英罗港红海榄群落演替中种间竞争初探. 见: 范航清, 梁士楚主编. 中国红树林研究与管理. 北京: 科学出版社, 1995. 94~99.
- 3 范航清. 广西海岸红树林现状及人为干扰. 见: 范航清, 梁士楚主编. 中国红树林研究与管理. 北京: 科学出版社, 1995. 189~202.
- 4 王文介等. 华南沿海和近海现代沉积. 北京: 科学出版社, 1991. 142~145.
- 5 黎 蔚. 涠洲珊瑚资源破坏严重. 海洋信息, 2001, 169(3): 19.
- 6 李 平. 海洋旅游可持续发展战略研究. 海洋开发与管理, 2000, 17(3): 7~11.
- 7 陈 君. 我国滨海旅游资源及其功能分区研究. 海洋开发与管理, 2000, 17(3): 41~47.

(责任编辑: 邓大玉)

(上接第 34 页)

$$d(y_b) + d(y_d) \leq a + c \leq [P/2], \text{矛盾};$$

情形 2.3: $d < c$ 类似上面情形 1 ~ 情形 2.1 可得

$$c \geq \lambda + 1, C \text{中至少有一点 } x_c \in C \text{与 } B \text{中所有的点都不相邻, 从而 } d(y_b) + d(x_c) \leq a + d \leq [P/2], \text{矛盾};$$

由此情形 1 ~ 情形 2, 定理得证.

推论 若 G 是 P 阶二分图, $\delta(G) > P/4$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

参考文献

- 1 Chartrand G. A graph theoretic approach to a communications problem. J SIAM Appl Math, 1996, (14): 778~781.
- 2 王朝瑞. 图论. 北京: 北京工业学院出版社, 1986.
- 3 布鲁巴斯 B[英]. 图论导引教程. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1985.

(责任编辑: 黎贞崇)