圆的多步法绘制理论和算法研究
Theory and Algorithm of *N*-Step Circle Rendering

李建华
Li Jianhua

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林 541004)
(College of Math. and Comp. Sci. ,Guangxi Normal Univ. ,Guilin,541004)

摘要 就画圆的多步法绘制问题进行了讨论,其主要思想是预先设法求得每次扫描循环绘制圆弧所需的 Pixels 数目 m_k,然后依据 m_k 值逐行进行绘制,此算法消除了绘制中 Pixels 的选择判断,提高了绘制的实时性。给出一般函数曲线和有关圆的多步法绘制的几个定理及算法,以及求 m_k 的迭代表达式。实验数据表明这些原理和算法是可行的。

关键词 圆 多步数目 多步区间 算法
中图法分类号 TP301.6;TP302.4 A

Abstract The N-step circle rendering problem is discussed. The main idea is firstly computing the pixels numbers (m_k) per inner loop, then making a line-by-line rendering according to m_k values. The method lays off pixels's decision and selection in rendering of curve, and improves real time property of rendering. Several theorems and formulae on N-step curve rendering and seeking m_k for the general functional curves and circles are revealed. The experimental data show that the theory and algorithm are feasible.

Key words circle, steps number, steps interval, algorithm

如何方便有效地、绘制曲线一直是计算机图形学所追求的一个目标。其中,较为引人注目的是二步法或多步法。即在扫描循环当中,如何减少选择判断,一次绘制多个 Pixels 的一种方法。目前,有关直线的多步法绘制已日趋成熟,但关于曲线的多步法绘制未见报道。本文试图从一般曲线的快速绘制算法出发,来讨论圆的多步法绘制方法。

本文提出一种基于 Bresenham 算法的新的理论及算法,其基本原理如图1所示,一段圆弧与任意一条逐行扫描线 $Y = Y_k$ 相交,此扫描线所绘制 Pixels 的数目(我们将在下面定义为多步数目),由 $Y = Y_k \pm 0.5$ 2条直线与圆弧的交点 $A(X_k, Y_k - 0.5)$、$B(X_{km}, Y_k + 0.5)$ 的横坐标的差值 $X_{km} - X_k + 1$ 确定,即图中粗黑线 CD 表示。多步法画圆在图中可理解为用直线 CD 来代替曲线 AB 的过程。

2002-06-20 收稿。

当我们求得图1中的 $X_{k1}=i.a, X_{km}=j.b$ 后，左右区间边界点的取整稍有不同。设左边边界点的横坐标为 $i.a$，右边为 $j.b$；(其中 $i,j\in Z, a,b\in[0,1]$) 若 $a>0$，则左边 $X_{k1}=i+1$，否则 $X_{k1}=i$；右边无论 b 取何值，则 $X_{km}=j$。因为只有这样，才能保证 Pixels 求取的同时，满足其纵坐标的误差≤0.5。

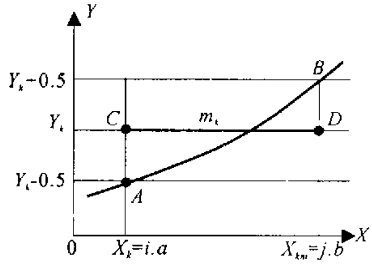

图 1　曲线的扫描转换

在以往的圆曲线绘制算法当中，比较典型的是 Bresenham 算法，其特点是逐点判断并反复求增量来进行绘制，由于逐点变化是线性的，故其增量也为线性的。而图1的 CD 变化却是非线性的，故所对应的增量多为非线性的，因此，就有可能到导至平方根求解的出现。

所以如何快速求取交点 A 或 B 就成了我们问题的关键，为避免直接求解平方根，增大计算量，我们采用黄金分割法(0.618法)来求取交点。理由是，0.618法算法简单，且 Pixels 的数目是整数解，故我们可以将交点的终止误差取得较大，这样我们能较快得到问题的解。实验表明，根据不同范围的 Pixels，调整不同的误差值 ep，可使求交的迭代次数大大少于当前行的 Pixels 的数目，同时仍有较好的曲线观察效果，详见图2、图3和表1。

$R=100$ Pixels

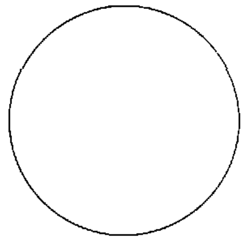

图 2　由 m_k 精确解绘制的图例

ep $=0.08$

$R=100$ Pixels

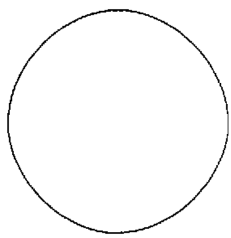

图 3　由 m_k 近似解绘制的图例

ep1 $=2.0(m_k\geqslant 5)$；ep2 $=0.8\ (3\leqslant m_k\leqslant 4)$

ep3 $=0.3\ (m_k\leqslant 2)$

当得到圆弧的1/8段多目数目的集合后(图4)，我们可以利用圆的对称性可以将其圆弧映射到所有的多段圆弧上，从而形成完整的圆曲线。

1　函数曲线多步法绘制理论

1.1　定义

定义1　多步数目：对于光栅图形平面空间中的第 k 条扫描线，每循环一次所绘制的像素(Pixels)数目，用 m_k 表示($m_k\geqslant 1, m_k\in Z$)。

定义2　多步区间：对于任意曲线函数 $f(x)$，设 X 为 $f(x)$ 在实数集 R 上的定义域，X 上存在多步数目 $m_k>1$ 的区间，用 MS 表示。

$$MS=\{x\mid x\in X\wedge\exists\ m_k>1\}.\tag{1}$$

定义3　单步区间：对于任意曲线函数 $f(x)$，设 X 为 $f(x)$ 在实数集 R 上的定义域，X 上不存在多步数目 $m_k>1$ 的区间，用 US 表示。

$$US=\{x\mid x\in X\wedge\neg\exists\ m_k>1\}.\tag{2}$$

1.2 性质

性质1 $MS + US = X$; (3)

证明 根据定义2的(1)式、定义3的(2)式,综合后有:$MS + US = X$。

1.3 引理

引理1 对于任意单调连续可导函数曲线 $f(x)$,多步数目 $m_k > 1$ 的充分条件为:$|f'(x)| \leqslant 0.5$,必要条件为:$|f'(x)| \leqslant 1$.

证明 先设 $f'(x) > 0$,

① 充分性(参考图1)

若 $f'(x) \leqslant 0.5$,则 $1/f'(x) \geqslant 2$,对于任意一条扫描线 Y_k,分别过 $Y = Y_k - 0.5$ 和 $Y = Y_k + 0.5$ 作2条平行线与 $Y = f(x)$ 曲线相交于 $A(i.a, Y_k - 0.5)$、$B(j.b, Y_k + 0.5)$ 2点($i,j \in Z; a,b \in [0,1]$),令 $\Delta x = (j.b - i.a)$,$\Delta y = (Y_k + 0.5) - (Y_k - 0.5) = 1$,$X = i.a + \varepsilon$,

表1 由3.1算法所得 m_k 的数值解算例列表

扫描线(I) $m_0 = 15$	ep = 0.08;		ep = 2.0;0.8;0.3	
	m_k	迭代次数	m_k	迭代次数
$0(Y_k = R)$	9	8	9	3
$1(Y_k = R-1)$	8	7	6	2
$2(Y_k = R-2)$	5	7	5	1
$3(Y_k = R-3)$	4	6	3	2
$4(Y_k = R-4)$	3	6	4	2
$5(Y_k = R-5)$	3	6	2	2
$6(Y_k = R-6)$	3	6	3	2
$7(Y_k = R-7)$	2	5	2	1
$8(Y_k = R-8)$	3	5	2	2
$9(Y_k = R-9)$	2	5	2	2

根据泰勒公式,有 $\Delta y = f'(x)\Delta x$,$\Delta x = \Delta y/f'(x) \geqslant 2$,即 $\Delta x = (j.b - i.a) = j + b - (i + a) \geqslant 2$,进一步可得 $j - (i+1) \geqslant 1 + a - b \geqslant 1 - b > 0$,故 $j > i + 1$.

由此,$i.a \leqslant i + 1 < j \leqslant j.b$,故当 $Y \in [Y_k - 0.5, Y_k + 0.5]$ 时,至少存在$\{i+1, j\}$ 2个整数,为Pixels的横坐标,∴必存在 $m_k \geqslant 2 > 1$;

② 必要性

同理,对于任意一条扫描线 Y_k,过 $Y = Y_k \pm 0.5$ 作2条平行线与 $Y = f(x)$ 曲线相交于 $A(i.a, Y_k - 0.5)$、$B(j.b, Y_k + 0.5)$ 2点(i,j,a,b 同上①),令 $X = i.a + \varepsilon$,$\Delta x = (j.b - i.a)$,$\Delta y = (Y_k + 0.5) - (Y_k - 0.5) = 1$,

根据泰勒公式,有 $\Delta y = f'(i.a + \varepsilon)\Delta x$,若在网格空间中,存在多步数目 $m_k \geqslant 2 > 1$,则至少存在 $i1, j1$ 2点($i1, j1 \in Z$),使得 $i.a \leqslant i1 < j1 \leqslant j.b$,必有 $j.b - i.a \geqslant j1 - i1 \geqslant 1$ 成立,故 $\Delta x \geqslant \Delta y$,于是 $f'(x) = \Delta y/\Delta x \leqslant 1$ 成立.

同理可证,当 $f'(x) < 0$ 时命题成立.

推论1 当且仅当 $|f'(x)| \leqslant 1$ 时多步区间 MS 满足。

证明 根据引理1,当 $|f'(x)| \leqslant 0.5$,必有 $m_k > 1$(充分性),故 $|f'(x)| \leqslant 1$ 时,存在 $m_k > 1$;又当 $m_k > 1$ 时,有 $|f'(x)| \leqslant 1$ (必要性).

∴ 推论1得证。

推论2 当且仅当 $|f'(x)| > 1$ 时单步区间 US 满足。

证明 用反证法 当 $|f'(x)| > 1$ 时,若存在 $m_k > 1$,根据定理1的必要性,

则必有 $|f'(x)| \leqslant 1$,此与假设矛盾;

另外,当不存在 $m_k > 1$ 时,若存在有 $|f'(x)| \leqslant 1$,根据定理1的充分性,有 $|f'(x)| \leqslant 0.5 < 1$ 时,存在 $m_k > 1$,故与假设矛盾,因而推论2成立。

2　圆的多步法绘制理论

2.1　定理

定理1　1/4圆弧方程 $X^2+Y^2=R^2(X\geqslant 0,Y\geqslant 0$，参考图4)中，

$$MS=\{x|x\in[0,\frac{R}{\sqrt{2}}]\}，此时\ y\in[\frac{R}{\sqrt{2}},R]; \tag{4}$$

$$US=\{x|x\in(\frac{R}{\sqrt{2}},R]\}，此时\ y\in[0,\frac{R}{\sqrt{2}}). \tag{5}$$

证明　对于圆弧方程 $X^2+Y^2=R^2(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)$，我们有：

$$Y=f(x)=\sqrt{R^2-X^2},$$

$$Y'=f'(x)=-\frac{X}{\sqrt{R^2-X^2}}. \tag{6}$$

根据引理1的推论1、2，分别有：$|f'(x)|\leqslant 1$ 和 $|f'(x)|>1$，

分别代入(6)式后，可分别求得 MS,US。即可得证。

定理2　对于1/4圆弧 $X^2+Y^2=R^2(X\geqslant 0,Y\geqslant 0$，参考图4)，任意给定 X_k、Y_k 下的当前行多步数目 m_k，满足关系式：$m_k^2+2X_km_k-2Y_k=0$.

证明　∵ 对于圆弧 $X^2+Y^2=R^2(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)$，任意给定 X_k、Y_k 下，必有：

$$X_k^2+(Y_k+0.5)^2=R^2, \tag{7}$$

$$(X_k+m_k)^2+(Y_k-0.5)^2=R^2, \tag{8}$$

由(2)－(1)式得：$m_k^2+2X_km_k-2Y_k=0$.　　(9)

证毕。

2.2　结论

① 根据定理1，我们能得到1/4圆弧的多步区间 MS 和单步区间 US 的范围；

② 根据定理2，只要能给出 X、Y 和 m 的初值 X_0、Y_0 和 m_0 就能由(9)式递阶求解 X_k、Y_k 和 m_k，此时：$X_{k+1}=X_k+m_k,Y_{k+1}=Y_k-1$；而由图4，可得到，$X_0=0,Y_0=R,m_0=M_{max}=(R^2-(R-0.5)^2)^{1/2}=(R-1/4)^{1/2}$。需要指出的是，$m_k$ 是一个递减序列，由于定理2表达式(9)为非线性，我们为避免求根，可由0.618法由 X_k 和 Y_k 求取 m_k，而 m_k 初值取自 m_{k-1}，这样，可减少初值取舍的随意性，从而提高收敛的速度。另外，误差门限可根据 m_k 值的大小分段确定，且可取得较大。这样，就以较少迭代次数的代价得到所求的解。

③1/4圆弧 $X^2+Y^2=R^2(X\geqslant 0,Y\geqslant 0$，参考图4)的另外1/8圆弧的 US 部分，可由1/8圆弧的 MS 对称映射得到。

3　圆的多步法绘制算法

3.1　算法

步骤1　计算圆弧：$X^2+Y^2=R^2(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)$ 中 MS 的 m_k，即1/8圆弧的 m_k.

① 将 X_0、Y_0 和 m_0 赋初值；

② 根据 $m_k^2+2X_km_k-2Y_k=0$，按精度要求，利用0.618法求 m_k 实数解；

③ 边界取整，求 m_k 整数解；

步骤2　绘制圆 $X^2+Y^2=R^2$.

① 绘制 MS 部分($Y\geqslant 0$)；

② 绘制 US 部分($Y \geqslant 0$) 部分；

③ 绘制 US 部分($Y < 0$)；

④ 绘制 MS 部分($Y < 0$).

3.2　程序运行效果

如图2、图3分别为当误差ep取较小和较大时，由3.1算法步骤1生成的 m_k 的数值解(详见表1)所绘制的2个圆的图例。

3.3　分析

由以上结果我们可以得出如下结论：

① 我们可以根据误差大小控制运算的速度和精度，当误差不是很小时，能很快收敛；当多步数目 m_k 较大时，可同时满足速度和精度的要求；但当 m_k 较小时，若要保证精度，则可能使得迭代次数超过 m_k，导致运算速度降低；

② 该算法的特点是将计算与绘制分开，在绘制前就能预先计算得到所需的数据，提高了绘制的实时性；

③ 该算法能推广到所有连续可导的函数曲线绘制，有关问题还需进一步研究。

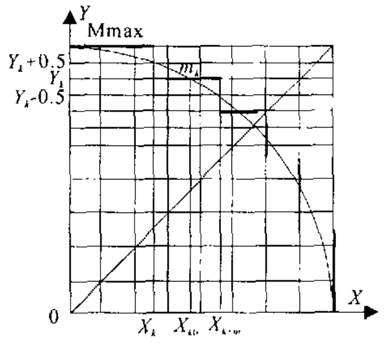

图4　圆的扫描转换

4　结束语

本文对圆的多步法绘制问题进行了一些有意义的探索，如何进一步降低求 m_k 的计算速度，将是包括圆在内的一般函数曲线的多步法绘制的关键。

(责任编辑：黎贞崇)

(上接第172页)

从1，2，…，n 中产生，不允许重复使用其中的任何一个数，但可以遗留下某些数不用。

(4)该题目曾用于2002年广西青少年计算机奥林匹克竞赛，得到了好评。

参考文献

1　华罗庚. 从杨辉三角谈起. 北京：中国青年出版社，1962.

2　陈凤谋等. C语言程序设计基础. 桂林：广西师范大学出版社，1997.3.

(责任编辑：黎贞崇)