第 18 卷第 2 期 广西科学院学报 Vol. 18, No. 2
2002 年 5 月 Journal of Guangxi Academy of Sciences May 2002

有关负二次相依与负正交相依随机变量若干结果的进一步探索*

Further Probe into Negatively Quadrant Dependent and Negatively Orthant Dependent 's Results

李永明
Li Yongming

(上饶师范学院数学系 上饶 334100;广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林 541004)
(Dept. of Math. Shangrao College, Shangrao, 334100; College of Math. and Comp. Sci., Guangxi Normal University, Guilin, 541004)

王成名
Wang Chengming

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林 541004)
(College of Math. and Comp. Sci., Guangxi Normal University, Guilin, 541004)

摘要 为了对负正交相依(NOD)和负二次相依(NQD)有一个深刻的理解,对 NOD 和 NQD 的性质以及它与负相协的关系做进一步探讨和论证,得出 NOD 条件下的部分和不等式及矩不等式.

关键词 负二次相依 负相协 负正交相依 矩不等式

中图法分类号 O211.3;O211.5 A

Abstract For getting more knowledge about Negatively Orthant Dependent (NOD) and Negatively Quadrant Dependent(NQD), the properties of NOD、NQD and its relation to Negatively Association are discussed. The inequality and moment inequality for partial sums are obtained under Negatively Orthant Dependent conditions.

Key words Negatively Quadrand Dependent, Negative Association, Negatively Orthant Dependent, moment inequality.

1 基本概念

E. L. Lehmann 在文献[1]定义了正二次相依(PQD)及负二次相依(NQD),但只给出 PQD 等价式,而未给出 NQD 等价式. 在本文给出 NQD 等价式并证明它的合理性,也给出了与负相协(NA)的关系. K. Joag-Dev and F. Proschan[2]只给出负正交相依(NOD)的定义而未进一步讨论,为了对 NOD 有一个深刻的理解,本文对 NOD 的性质以及它与 NA 的关系做进一步探讨和论证,并得出 NOD 条件下的部分和不等式及矩不等式.

2001-12-17 收稿.
* 国家自然科学基金项目 (10161004).

定义 1.1 称 r.v.'s X,Y 是正二次相依(PQD),若

$$P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \leqslant P(X \leqslant x)P(Y \leqslant y), \forall\ x,y \in R, \tag{1.2}$$

把 PQD 和 NQD 统称为二次相依.

定义 1.2[2] 称 r.v.'s $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是负相协(NA),如果对于集合$\{1,2,\cdots,n\}$的任意两个不交子集 A_1,A_2,都有

$$\operatorname{cov}(f_1(X_i,i \in A_1), f_2(X_j,j \in A_2)) \leqslant 0, \tag{1.3}$$

其中 f_1,f_2 是任意两个使得协方差存在且对每个变量均非增(或对每个变量均非减)的函数.

定义 1.3[2] 对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,如果有

$$P(X_i > x_i, i=1,2,\cdots,n) \leqslant \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i), \tag{1.4}$$

则称 r.v.'s $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 负上正交相依(NUOD);如果有

$$P(X_i \leqslant x_i, i=1,2,\cdots,n) \leqslant \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x_i), \tag{1.5}$$

则称 r.v.'s $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 负下正交相依(NLOD);如果 r.v.'s $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 既是 NUOD 又是 NLOD,则统称为是 NOD 的.

下面是 PQD 的定义中(1.1)式等价式(见文献[1]).

$$P(X \leqslant x, Y \geqslant y) \leqslant P(X \leqslant x)P(Y \geqslant y); \tag{1.6}$$

$$P(X \geqslant x, Y \leqslant y) \leqslant P(X \geqslant x)P(Y \leqslant y); \tag{1.7}$$

$$P(X \geqslant x, Y \geqslant y) \geqslant P(X \geqslant x)P(Y \geqslant y). \tag{1.8}$$

2 NQD 的等价式及与 NA 的关系

对 NQD 定义中的(1.2)式,也有类似于 PQD 的如下一些等价式.

定理 2.1 对任意的 x,y,(1.2) 式和下列式子是等价的:

$$P(X \leqslant x, Y \geqslant y) \geqslant P(X \leqslant x)P(Y \geqslant y); \tag{2.1}$$

$$P(X \geqslant x, Y \leqslant y) \geqslant P(X \geqslant x)P(Y \leqslant y); \tag{2.2}$$

$$P(X \geqslant x, Y \geqslant y) \leqslant P(X \geqslant x)P(Y \geqslant y). \tag{2.3}$$

注 2.1 定理 2.1 中各式取概率时把"$\leqslant$"或"$\geqslant$"换成"$<$"或"$>$"仍然成立.如(1.2)写成 $P(X<x,Y<y) \leqslant P(X<x)P(Y<y)$ 仍然成立,其它情况类同.

事实上,由(1.2) 式有 $P(X \leqslant x-\frac{1}{n}, Y \leqslant y-\frac{1}{n}) \leqslant P(X \leqslant x-\frac{1}{n})P(Y \leqslant y-\frac{1}{n})$,便有 $\inf_n P(X \leqslant x-\frac{1}{n}, Y \leqslant y-\frac{1}{n}) \leqslant \inf_n P(X \leqslant x-\frac{1}{n})P(Y \leqslant y-\frac{1}{n})$.令 $n \to +\infty$ 时,有 $P(X<x,Y<y) \leqslant P(X<x)P(Y<y)$.再用$(+\frac{1}{n})$ 或$(-\frac{1}{n})$ 可证其它情况.

证明 (i)先证(1.2)式与(2.1)式等价.当(1.2)式成立,利用注2.1和 $(X \leqslant x, Y \geqslant y) = (X \leqslant x) - (X \leqslant x, Y < y)$ 得

$$\begin{aligned} P(X \leqslant x, Y \geqslant y) &= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant x, Y < y) \\ &\geqslant P(X \leqslant x) - P(X \leqslant x)P(Y < y) \\ &= P(X \leqslant x)P(Y \geqslant y). \end{aligned}$$

即证得(2.1) 式成立.

当(2.1) 式成立,由 $(X \leqslant x, Y \leqslant y) = (X \leqslant x) - (X \leqslant x, Y > y)$ 得

$$\begin{aligned} P(X\leqslant x,Y\leqslant y) &= P(X\leqslant x)-P(X\leqslant x,Y>y) \\ &\leqslant P(X\leqslant x)-P(X\leqslant x)P(Y>y)(\text{由(2.1) 式及注 2.1}) \\ &= P(X\leqslant x)P(Y\leqslant y). \end{aligned}$$

即有(1.2)式成立.这样,我们证明了(1.2)式和(2.1)式是等价的.

(ii)用同样的手法证得(1.2)式与(2.3)式等价.因为(2.1)式与(2.2)式中 X 与 Y 的地位是相同的.

(iii)下面证明(2.2)式与(2.3)式等价.若(2.2)式成立,由 $(X\geqslant x,Y\geqslant y)=(X\geqslant x)-(X\geqslant x,Y<y)$ 得

$$\begin{aligned} P(X\geqslant x,Y\geqslant y) &= P(X\geqslant x)-P(X\geqslant x,Y<y) \\ &\leqslant P(X\geqslant x)-P(X\geqslant x)P(Y<y)(\text{由(2.2) 式及注 2.1}) \\ &= P(X\geqslant x)P(Y\geqslant y). \end{aligned}$$

即证得(2.3) 式成立.

反之,若(2.3) 式成立,由 $(X\geqslant x,Y\leqslant y)=(X\geqslant x,Y>y)$ 得

$$\begin{aligned} P(X\geqslant x,Y\leqslant y) &= P(X\geqslant x)-P(X\geqslant x,Y>y) \\ &\geqslant P(X\geqslant x)-P(X\geqslant x)P(Y>y)(\text{由(2.3) 式及注 2.1}) \\ &= P(X\geqslant x)P(Y\leqslant y). \end{aligned}$$

即证得(2.2)式成立.这样,我们证明了(2.2)式和(2.3)式是等价的.

综合(i)(ii)(iii)知定理2.1得证.

NQD 的性质在文献[1]中已有讨论,下面我们给出 NQD 与 NA 的关系.

引理2.1　如果 F_{XY} 为 X,Y 的联合分布,F_X,F_Y 分别为 X,Y 的分布,则有

$$E(XY)-E(X)E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[F_{XY}(x,y)-F_X(x)F_Y(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.4}$$

假设左边的各期望都存在.

证明见文献[1].

定理2.2　2个随机变量 X,Y 是 NQD 的当且仅当 X,Y 是 NA 的.

证明　(i)若 X,Y 是 NA 的,则 $I(X<x),I(Y<y)$ 仍是 NA 的,由 NA 的定义得

$$E(I(X<x)I(Y<y))\leqslant E(I(X<x))E(I(Y<y)).$$

由此有 $P(X<x,Y<y)\leqslant P(X<x)P(Y<y)$,即 X,Y 为 NQD 的.

(ii)若 X,Y 为 NQD 的,则 $f(X),g(Y)$ 也是 NQD 的,其中 f,g 是任意的和谐函数,则有

$$P(f(X)<x,g(Y)<y)\leqslant P(f(X)<x)P(g(Y)<y),\forall\ x,y\in R.$$

这等同于 $F_{f(X)g(Y)}(x,y)-F_{f(X)}(x)F_{g(Y)}(y)\leqslant 0$,据此,知(2.4)式右边的积分小于等于0,从而由引理 2.1 有 $E(f(X)g(Y))-E(f(X))E(g(Y))\leqslant 0$,即 $\mathrm{cov}(f(X),g(Y))\leqslant 0$,这说明 X,Y 是 NA 的.由(i)(ii)知定理2.2得证.

3　NOD 的性质及有关结果

文献[2]中仅给出了 NOD 的定义,我们将在下面就 NOD 的一些性质进行讨论.

定理3.1　(i)NOD 变量族的任意子变量族仍为 NOD 的;(ii)两组相互独立的 NOD 变量族全体仍是 NOD 变量,即设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_n$ 都是 NOD 变量,则 $X_1,X_2,\cdots,X_m$,$Y_1,Y_2,\cdots Y_n$ 是 NOD 变量.

证明 (i)设 $X_1,\cdots,X_n$ 是NLOD的,且 $X_{n1},X_{n2},\cdots,X_{nk}$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任一子变量族,则对任意实数 $x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nk}$ 有

$$P(X_{ni}\leqslant x_{ni},i=1,2,\cdots,k)=P(X_1<+\infty,\cdots,X_{n1-1}<+\infty,X_{n1}\leqslant x_{n1},X_{n1+1}<+\infty,\cdots,X_{nk-1}<+\infty,X_{nk}\leqslant x_{nk},X_{nk+1}<+\infty,\cdots,X_n<+\infty)\leqslant\prod_{i=1}^{k}P(X_{ni}\leqslant x_{ni}).\tag{3.1}$$

从而由NLOD的定义知 $X_{n1},X_{n2},\cdots,X_{nk}$ 也是NLOD的.

若 $X_1,\cdots,X_n$ 是NUOD的,则由

$$P(X_{ni}>x_{ni},i=1,2,\cdots,k)=P(X_1>-\infty,\cdots,X_{n1-1}>-\infty,X_{n1}>x_{n1},X_{n1+1}>-\infty,\cdots,X_{nk-1}>-\infty,X_{nk}\geqslant x_{nk},X_{nk+1}>-\infty,\cdots,X_n>-\infty)\leqslant\prod_{i=1}^{k}P(X_{ni}>x_{ni}).\tag{3.2}$$

从而由NUOD的定义知 $X_{n1},X_{n2},\cdots,X_{nk}$ 也是NUOD的.由此证得(i).

(ii)设随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$,$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 是相互独立的,且 $X_1,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,\cdots,Y_n$,是NLOD的,则对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n$,有

$$P(X_i\leqslant x_i,i=1,\cdots,m,Y_j\leqslant y_j,j=1,\cdots,n)=P(X_i\leqslant x_i,i=1,\cdots,m)P(Y_j\leqslant y_j,j=1,\cdots,n)\leqslant\prod_{i=1}^{m}P(X_i\leqslant x_i)\prod_{i=1}^{n}P(Y_j\leqslant y_j),\tag{3.3}$$

即 $X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots Y_n$ 是NLOD的.

同样,若 $X_1,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,\cdots,Y_n$,是NUOD的,则由类似地推理可证明 $X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots Y_n$ 是NUOD的.这样,我们证明了定理3.1的(ii)部分.

定理3.2 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是NOD,则其必是两两NQD,也是两两NA.

证明 对任意的实数 x_i,x_j,

$$P(X_i<x_i,X_j<x_j)=P(X_1<+\infty,\cdots,X_{i-1}<+\infty,X_i<x_i,X_{i+1}<+\infty,\cdots,X_{j-1}<+\infty,X_j<x_j,X_{j+1}<+\infty,\cdots,X_n<+\infty)\leqslant P(X_1<+\infty)\cdots P(X_i<x_i)\cdots P(X_j<x_j)\cdots P(X_n<+\infty)=P(X_i<x_i)P(X_j<x_j),$$

$(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

由此说明 X_i,X_j 是NQD.又由 i,j 的任意性知其必是两两NQD,从而也是两两NA.

记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,下面给出在NOD下的部分和不等式,它是文献[3]附录2(五)3式及引理4.3(i.i.d.情形)的结果在NOD下的推广.

定理3.3 设 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 是NOD变量序列,$EX_i=0,EX_i^2<+\infty,i=1,2,\cdots,n$,则对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$P(|S_n|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}X_i.\tag{3.4}$$

证明

$$\begin{aligned}P(|S_n|>\varepsilon)&\leqslant\varepsilon^{-2}\mathrm{var}S_n\\&=\varepsilon^{-2}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}X_i+2\sum_{i\neq j}\mathrm{cov}(X_i,X_j))\\&\leqslant\varepsilon^{-2}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}X_i)\text{(由定理 3.2)}.\end{aligned}$$

定理3.4 设 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 是NOD的,且具有对称分布的随机变量序列,若满足条件

$$P(X_j > a, \sum_{i\neq j} X_i > 0) = P(X_j > a, \sum_{i\neq j} X_i \leqslant 0), (a > 0), \tag{3.5}$$

则对任意的 $\varepsilon > 0$,有

$$P(|S_n| > \varepsilon) \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > \varepsilon)(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > \varepsilon)). \tag{3.6}$$

特别当$\{X_i, i \geqslant 1\}$ 是同分布时,有

$$P(|S_n| > \varepsilon) \geqslant nP(|X_j| > \varepsilon)(\frac{1}{2} - nP(|X_j| > \varepsilon)). \tag{3.7}$$

证明　对任给的 $\varepsilon > 0$,记 $A_j = \{X_j > \varepsilon\} \cap \{\sum_{i\neq j} X_i > 0\}$,我们有

$$P(S_n > \varepsilon) \geqslant P(\bigcup_{j=1}^{n}[\{X_j > \varepsilon\} \cap \{\sum_{i\neq j} X_i > 0\}]) = P\{\bigcup_{j=1}^{n} A_j\} \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i\neq j} P(A_i A_j).$$

由(3.5)式知

$$P(A_j) = P(X_j > \varepsilon, \sum_{i\neq j} X_i > 0) = \frac{1}{2} P(X_j > \varepsilon).$$

又

$$\begin{aligned} P(A_i A_j) &= P(\{X_i > \varepsilon\} \cap \{\sum_{k\neq i} X_k > 0\}, \{X_j > \varepsilon\} \cap \{\sum_{k\neq j} X_k > 0\}) \\ &\leqslant P(X_i > \varepsilon, X_j > \varepsilon) \leqslant P(X_i > \varepsilon) P(X_j > \varepsilon), \end{aligned}$$

于是

$$P(S_n > \varepsilon) \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(X_j > \varepsilon)(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} P(X_i > \varepsilon)). \tag{3.8}$$

注意到$\{-X_i, i \geqslant 1\}$ 亦为 NOD 变量序列,以 $-X_j$ 代 X_j, $j = 1, 2, \cdots, n$,可得

$$P(S_n < -\varepsilon) \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(X_j < -\varepsilon)(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} P(X_i < -\varepsilon)). \tag{3.9}$$

从而

$$P(|S_n| > \varepsilon) \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > \varepsilon)(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > \varepsilon)),$$

此即(3.6)式. 特别当$\{X_i, i \geqslant 1\}$ 是同分布时,有

$$P(|S_n| > \varepsilon) \geqslant nP(|X_j| > \varepsilon)(\frac{1}{2} - nP(|X_j| > \varepsilon)).$$

定理证毕.

参考文献

1　Leham E L. Some concepts of dependence. Ann Math Statist, 1966, 37(5): 1137～1153.

2　Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications. Ann Statist, 1983, 11 (1): 286～295.

3　林正炎,陆传荣,苏中根. 概率极限理论基础. 北京:高等教育出版社,1999.

(责任编辑:邓大玉)