第 17 卷第 4 期和增刊　　广西科学院学报　　Vol. 17, No. 4 & Supplement
2001 年 11 月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　November 2001

寻找自然数集合中不同等差数列个数的一个方法

A Method for Searching for Number of Equi-different Number Sequences in the Set of Natural Numbers

伍一坤　　罗卉*
Wu Yikun　　Luo Hui

（广西大学信息网络中心　南宁　530004）
(Info. & Network Center, Guangxi Univ., Nanning, 530004)

摘要　对几个寻找自然数集合中不同等差数列个数的计算机程序进行了算法分析。

关键词　等差数列　自然数集　程序算法

中图法分类号　TP399；O122.4

Abstract　Several algorithms of searching for number of equi-differnet number sequences in the set of natural numbers are analyzed.

Key words　equi-different number sequence, natural numbers, program, algorithm

1　题目

我们把原全国数学竞赛的 1 道题用在广西 2001 年青少年计算机竞赛中，取得了较好的效果，它是 1991 年全国高中数学联赛第二试第 1 题。题目如下：

设 $S = \{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 均不能构成与 A 有相同公差的等差数列。求这种 A 的个数。

2　算法分析

2.1　顺序查找法

这样的题目不易看出它的结果，甚至常常不知如何下手。这时最好的办法就是从最初始的情况，老老实实地、一个一个地数，逐渐寻找其中的规律。

当 $n = 2, S = \{1,2\}$ 时，只有 1 个等差数列，$A1$：1，2。这时等差数列的个数 $T = 1$；

当 $n = 3, S = \{1,2,3\}$ 时，有 2 个等差数列，$A1$：1，2，3；$A2$：1，3。而 2，3 所代表的数列就是 $A1$，不是新的等差数列。$T = 2$；

当 $n = 4, S = \{1,2,3,4\}$ 时，有 4 个等差数列，$A1$：1，2，3，4；$A2$：1，3；$A3$：1，4；$A4$：2，4。$T = 4$；

2001-06-07 收稿。

* 广西大学计算机与信息工程学院计算机科学系 97-2，南宁，530004。

如果把这些等差数列分类，可以是：由第 1 个元素形成的等差数列有 3 个；除此之外，由第 2 个元素形成的等差数有 1 个。可以简单地写成 $T = 3 + 1 = 4$；

当 $n = 5, S = \{1,2,3,4,5\}$ 时，$T = 4 + 2 = 6$；

当 $n = 6, S = \{1,2,3,4,5,6\}$ 时，$T = 5 + 3 + 1 = 9$；

当 $n = 7, S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 时，$T = 6 + 4 + 2 = 12$；

当 $n = 8, S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 时，$T = 7 + 5 + 3 + 1 = 16$。

还可以继续查找下去，但是不同的等差数列个数的规律已经看得出来了。对于 n 个自然数，不同的等差数列的个数 $T = (n-1) + (n-3) + \cdots$

当 n 是偶数时，上面的式子最后加到 1；当 n 是奇数时，上面的式子最后加到 2。这个式子用等差数列的求和公式来求和，有

当 n 是偶数时，$T = ((n-1)+1)/2 \times n/2 = n^2/4$；

当 n 是奇数时，$T = ((n-1)+2)/2 \times (n-1)/2 = (n^2-1)/4$。

下面我们用几个程序来进一步说明。参加这次竞赛高中组的 44 个考生中大约有 10 个人能做对这道题，我们选择了 5 个编得较好的程序介绍给大家。其中 3 个考生是基本上按照上面的思路编出的，分别介绍如下。

程序 1（柳州高中杨筱筠）

```
program d04;
var
  i, j, n, s: longint;
begin
  write ('input n='); readln (n);
    for i: =1 to n-1 do
      for j: = i to n-i do
        t: =t+1;
    writeln (s); readln;
end.
```

他的程序编得很简洁，但循环过程中有冗余的部分，计数时是一个一个加上去的，执行效率略低点。

以下的程序，为节约篇幅，我们只列出其中最核心的循环语句部分。

程序 2（柳州高中诸葛菁）

```
for a1: =1 to n div 2 do
  for d: =a1 to n-1 do
    if a1+d<=n then t: =t+1;
```

该程序循环中外层循环的冗余已经没有了，但是又增加了内层循环的冗余，结合题意设置循环变量，使程序更易读。

程序 3（柳铁一中姚军）

```
for i: =1 to n div 2 do
  t: =t+n-i-i+1;
```

该程序循环中已没有冗余，而且仅用一层循环，计数时不是一个一个而是若干个一起加上去，程序的执行效率高。

2.2 公差分类法

上面的分析方法是以等差数列的首项为分类代表元来进行研究的。我们也可以换一个角度，以等差数列的公差为分类代表元来研究这个问题，把等差数列按不同的公差值来进行分类。

当 $n=2$ 时，只有1个等差数列 $A1$:1,2，即公差为1的等差数列有1个；

当 $n=3$ 时，$A1$:1,2,3，公差为1，$A2$:1,3，公差为2，即公差为1,2的等差数列各有1个；

当 $n=4$ 时，$A1$:1,2,3,4，公差为1，$A2$:1,3，公差为2，$A3$:2,4，公差为2，$A4$:1,4，公差为3，即公差为1，2，3的等差数列分别有1，2，1个；

当 $n=5$ 时，$A1$:1,2,3,4,5，公差为1，$A2$:1,3,5，$A3$:2,4，以上2个等差数列公差为2，$A4$:1,4，$A5$:2,5，以上2个等差数列公差为3，$A6$:1,5，公差为4，即公差为1,2,3,4所对应的等差数列分别有1,2,2,1个；

当 $n=6$ 时，公差为1,2,3,4,5所对应的等差数列的个数分别为1,2,3,2,1；

当 $n=7$ 时，公差为1,2,3,4,5,6所对应的等差数列的个数分别为1,2,3,3,2,1；

当 $n=8$ 时，公差为1,2,3,4,5,6,7所对应的等差数列的个数分别为1,2,3,4,3,2,1；…

如果把按公差 d 分类的不同的等差数列个数列成1个类似于杨辉三角的形式，就可以有表1。

表1 不同 n 值的公差 d 的等差数列

d	1	2	3	4	5	6	7	…
2	1							
3	1	1						
4	1	2	1					
5	1	2	2	1				
6	1	2	3	2	1			
7	1	2	3	3	2	1		
8	1	2	3	4	3	2	1	
⋮	…							

下面的2个程序是考生基本上按照上面的思路编出来的。

程序4（柳铁一中张翼）

```
for i: =1 to n-1 do
  if n-i<i then inc (total, n-i)
    else inc (total, i) ;
```

程序5（柳铁一中陈实）

```
for i: =1 to n-1 do
  t: =t+min (i, n-i);
```

以上两个程序都很简洁，执行效率很高。

3 数学分析的方法

对于 $n=2k$，所述数列 A 必有连续两项，一项在 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，另一项在 $\{k+1,k+2,\cdots,n\}$ 中，反之，从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中任取一数，$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$ 中任到一数，以它们的差为公差均可作出一个 A。此对应是一一对应。故这种 A 的个数为 $k^2=n^2/4$。

对于 $n=2k+1$，情况完全类似，注意集合 $\{k+1,k+2,\cdots,n\}$ 中有 $k+1$ 个数，故这种 A 的个数为 $k(k+1)=(n^2-1)/4$。两式可统一为 $[n^2/4]$。

参考文献

1 中国人民大学附中．华罗庚数学学校试题解析．北京：中国大百科全书出版社，1993.

（责任编辑：黎贞崇）