第 17 卷第 1 期
2001 年 2 月

广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

Vol. 17, No. 1
February 2001

判别哈密尔顿图的新方法

A New Method of Judgement of a Hamiltonian Graph

罗示丰
Luo Shifeng

(广西大学计算机与信息工程学院 南宁 530004)
(College of Computer and Information Engineering, Guangxi University, Nanning, 530004)

摘要 提出求一个图的顶点覆盖的 VC 算法，定义图的 VC 表示式及其全闭链的概念。证明一个连通无向图是哈密顿图当且仅当其 VC 表示式含有一条全闭链，并证明对构造全闭链有用的定理和推论。

关键词 顶点覆盖 VC 算法 VC 表示式 全闭链

中图法分类号 O 157.5

Abstract A VC-algorithm to obtain the vertex covering of a graph is presented. The VC representative and full-closed chain of the graph are defined. It is proved that a connective graph is Hamiltonian graph if and only if there is a full-closed chain in it's VC representative. A proof is also given to some other theorem and inferences which are very useful in constructing a full-closed chain.

Key words vertex covering, VC algorithm, VC representative, full-closed chain

1 基本概念

为了求图 G 的顶点覆盖，我们提出下面的 VC 算法：

第 1 步：$S \leftarrow \varnothing, K \leftarrow 1$；第 2 步：找出图 $G = (V, E)$ 度数最大的顶点 X_k；第 3 步：删去 X_k 以及与 X_k 关联的所有边；第 4 步：$V \leftarrow V - \{X_k\}$，$E \leftarrow E - \{$边 | 与 Xk 关联的边$\}$，$S \leftarrow SU\{X_k\}$；第 5 步：若 $E = \varnothing$（G 为零图）则停止计算，否则 $K \leftarrow K + 1$ 转第 2 步.

设 $K = L + 1$ 时 G 已成零图，下面的符号

$(1 \leqslant K \leqslant L)$

表示 K 每取一个值时度数最大的顶点 X_k，以及它所关联的边是 $(X_k, X_{k1})(X_k, K_{k2}), \cdots, (X_k, X_{kpk})$.

定义 1 对于任一连通的无向图 G 按照 VC 算法所得到的

$VC(G) = \{U_{x_1}^{\{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1p1}\}}, U_{x_1}^{\{x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2p2}\}}, \cdots U_{x_1}^{\{x_{l1}, x_{l2}, \cdots, x_{lpl}\}}\}$

称为图 G 的 VC 表示式，并且，称

$U_{x_k}^{\{x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kpk}\}}$, $(1 \leqslant k \leqslant l)$

2000-08-04 收稿。

为图 G 的 VC 表示式的项，把其中的 $\{x_{k1},x_{k2},\cdots,x_{kpk}\}$ 和 x_k 分别叫做 K 项的上标和下标.

定义 2　如果在图 G 的 VC 表示式中含有形如

$$U_{x_{i2}}^{\{x_{i1},x_{i3},\cdots\}},U_{x_{i4}}^{\{x_{i3},x_{i5},\cdots\}},\cdots,U_{x_{ik}}^{\{x_{ik-1},x_{ik+1},\cdots\}},\cdots,U_{x_{in}}^{\{x_{in-1},x_{i1},\cdots\}}$$

或 $$U_{x_{i2}}^{\{x_{i1},x_{i3},\cdots\}},U_{x_{i4}}^{\{x_{i3},\cdots\}},U_{x_{i5}}^{\{x_{i4},\cdots\}},\cdots,U_{x_{ik}}^{\{x_{ik-1},x_{ik+1},\cdots\}},U_{x_{ik+1}}^{\{x_{ik+2},\cdots\}},\cdots,U_{x_{in}}^{\{x_{i1},\cdots\}} \tag{H}$$

的项就说图 G 的 VC 表示式含有一条全闭链. 这时的项称为该链中的环.

其中 $\{x_{i1},x_{i2},x_{i3},\cdots,x_{ik-1},x_{ik},\cdots,x_{in}\}=V$.

2　定理及其证明

定理 1　图 $G=(V,E)$ 是哈密尔顿图的充要条件是它的 VC 表示式含有一条全闭链.

证明　1) 充分性

设图 $G=(V,E)$ 按 VC 算法，其 VC 表示式含有一条全闭链 (H)，这时 $x_{i1}—x_{i2}—x_{i3}—\cdots—x_{ik-1}—x_{ik}—\cdots—x_{in-1}—x_{in}—x_{i1}$ ($\{x_{i1},x_{i2},x_{i3},\cdots,x_{in}\}=V$) 就是一条哈密尔顿回路，因而图 G 是哈密尔顿图.

2) 必要性

设图 G 是哈密尔顿图，那么，它必然有一条哈密尔顿回路，假定这条哈密尔顿回路是

$$x_1—x_2—x_3—\cdots—x_{k-1}—x_k—x_{k+1}—\cdots—x_n—x_1. \tag{C}$$

现在，我们按上述的VC算法，一步步地计算出图G的顶点覆盖$VC(G)$，并且通过VC表示式表示之.

首先，找出图 G 中度数最大的顶点，比方说是 x_k，那么由(C) 知，与 x_k 关联的边中，至少应当含(x_k,x_{k-1}) 和(x_k,x_{k+1})，亦即在 G 的 VC 表示式中当有项 $U_{x_{ik}}^{\{x_{ik-1},x_{ik+1},\cdots\}}$ 出现. 此处省略号表示除 x_{k-1} 和 x_{k+1} 外，x_k 也许还有其它的邻接点. 接着我们删去 x_k 以及它所关联的所有边. 然后在所剩下的子图中找度数最大的顶点，比方说是 x_i，此时有两种可能：①$x_i=x_{k-1}$ 或 $x_i=x_{k+1}$. 前者，x_i 所关联的边中至少应含有(x_{k-1},x_{k-2})；后者，x_i 所关联的边中至少应含有(x_{k+1},x_{k+2})(这两条边都在回路(C) 中). 因而在它的VC表示式中当出现形如$U_{x_{ik-1}}^{\{x_{ik-2},\cdots\}}$ 或$U_{x_{ik+1}}^{\{x_{ik+2},\cdots\}}$ 的项. ②$x_i\neq x_{k-1}$ 且 $x_i\neq x_{k+1}$，x_i所关联的边中，至少应含有(x_i,x_{i-1}) 和$(_i,x_{i+1})$ $(2\leqslant i\leqslant n-1)$. 因而在它的 VC 表示式中当有形如 $U_{x_i}^{\{x_{i-1},x_{i+1},\cdots\}}$ 的项. 接着，再删去顶点 x_i 以及它所关联的边. 继续这个过程，直至剩下来的子图为零图. 当我们往下再找剩下来的子图中的度数最大顶点及其所关联的边时，除了遇到上述的 ①、② 这两种情况外，还可能遇到第 3 种情况即与该顶点关联的边中不含有回路(C) 的任何一条边.

由于 VC 算法过程结束时，图 G 的所有边均已删除殆尽，其中也包括回路(C) 中的边 —— 它或者以两邻接边的形式，或者以单独边的形式全都出现在 G 的 VC 表示式的若干个项中. 所以，只要我们适当地调整一下这些含(C) 中的边的项的次序，就能使之具有形如(H) 的式子即含有一条全闭链. 证毕.

定理 2　设连通无向图 $G=(n,m)$ 是哈密尔顿图，$VC(G)$ 是它的 VC 表示式，且 $|VC(G)|=L$，那么：1) 当 n 为偶数时，$L\geqslant n/2$；2) 当 n 为奇数时，$L\geqslant[n/2]+1$；

证明　因为图G是哈密尔顿图，所以，它必有一条哈密尔顿回路，这条回路的长是n. 另一方面，从定理1的证明中已经知道，图G的VC表示式中的项最多含该回路中的两条边. 从而如果n是偶数时，最少需$n/2$个项才可能含该回路中的全部n条边，即$L\geqslant n/2$. 同理，在n是奇数

时，最少需$[n/2]+1$个项(除1项只含该回路的一条边外，其余各项均含该回路的两条边.)才可能含该回路中的全部n条边，即$L \geqslant [n/2]+1$.

定义3 如果图G的VC表示式中含有一条全闭链，我们把含图G的哈密尔顿回路中的两条边的环称为大环，只含该回路中的一条边的环称为小环.

由已知事实，易得下面推论

推论1 设图$G=(n,m)$的VC表示式含一条全闭链，且n_1和n_2分别是其中大环和小环的个数，那么

$2n_1+n_2=n.$

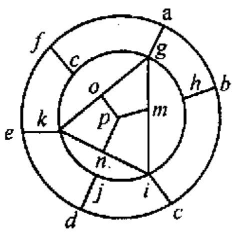
由推论1知，全闭链中的小环个数n_2的奇偶性随n的奇偶性而定.

推论2 如果图G的VC表示式含有一条全闭链，那么，G的任一顶点x_i都不只一次地出现在小环的上、下标和大环的上标中(参看(H)).

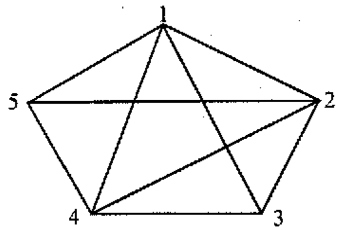
定理2及其以后的推论，对于构造全闭链的具体操作是很有用的.

3 例子

例 判断下面的图是不是哈密尔顿图.



(G_1)



(G_2)

解:首先按VC算法，分别求出图G_1和图G_2的VC表示式

$VC(G_1)=\{U_g^{\{a,l,o,m,h\}},U_i^{\{c,h,m,n,j\}},U_k^{\{e,l,o,n,j\}},U_p^{\{m,n,o\}},U_d^{\{c,j,e\}},U_b^{\{a,h,c\}},U_f^{\{a,l,e\}}\}$

与$VC(G_2)=\{U_1^{\{2,3,4,5\}},U_2^{\{3,4,5\}},U_4^{\{3,5\}}\}$

$\because |VC(G_1)|=7<n/2=16/2=8$

$\therefore$ 图G_1不是哈密尔顿图(定理2).

另据推论2，若$VC(G_2)$含有全闭链，它必然是$2n_1+n_2=5$(G_2的顶点数为5)，其项数$L=3$，其全闭链只能由一个小环两个大环构成：

1) 第3项作小环，其它作大环有全闭链如

$U_4^{\{3,5\}},U_2^{\{4,5,3\}},U_1^{\{5,3,4,2\}}$ 等；

2) 第2项作小环，其它作大环有全闭链如

$U_2^{\{3,4,5\}},U_1^{\{2,5,3,4\}},U_4^{\{5,3\}}$ 等；

3) 第1项作小环，其它作大环的全闭链没有(推论2). 但这并不妨碍我们作出正确的判断：图G_2是哈密尔顿图.

参考文献

1 罗示丰. 两图同构的判别准则及其复杂性. 计算机科学，1997，(10)专辑：148～153.

(责任编辑：邓大玉)