基于最可靠判断行的判断矩阵校正方法

A Rectification Method of Judgement Matrix Based on Most Reliable Row of Judgement

韦兰用

Wei Lanyong

(广西工学院教务处　柳州　545006)

(Administrative Division of Scholastic Affairs, Guangxi Institute of Technology, Liuzhou, 545006)

摘要　根据判断矩阵 A 的 n 个判断行生成 n 个具有一致性的判断矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，并引入 A_k 与 A 偏差矩阵 B_k，偏差量 $e_k(k=1,2,\cdots,n)$. 如果 A_i 与 A 的偏差最小，则以第 i 行为最可靠判断行，并将 A 与 A_i 偏差最大的行中偏差最大的元素确定为首先需要校正的元素.

关键词　判断矩阵　一致性矩阵　校正

中图法分类号　O 223

Abstract　The consistent judgement matrixes, $A_1, A_2, \cdots, A_n$, are generated by the rows of judgement in matrix A. B_k is the deviation matrix between A_k and A, and the deviation scope is $e_k(k=1,2,\cdots,n)$. If deviation between A_i and A is the least, we can affirm that Row i will be the most reliable judgement row of A. Based on this, we can find the element of larger deviation in the row of larger deviation between A_i and A, and make rectification.

Key words　judgement matrix, consistent judgement matrix, rectification

层次分析法是多目标决策分析的一种简易而有效的方法. 在实际应用中它要求决策者针对某一准则，通过两两比较建立判断矩阵，而且要求判断矩阵具有满意的一致性. 由于客观事物的复杂性和人们认识的多样性，得出的判断矩阵很难达到满意的一致性，因而有必要对判断矩阵进行校正. 通过对判断矩阵个别异常判断值的修改，使判断矩阵达到满意的一致性的同时，尽量保持原矩阵的判断信息. 这就要求能找到一种对判断矩阵一致性影响最大的异常判断值的定位方法，并对这一判断值进行校正. 文献 [1, 2] 所给出的校正方法，在确定最大偏差元素时所用的参照标准都使用了原判断矩阵的所有信息（包括异常判断信息），会影响到一次校正达到满意一致性的可能性. 本文从原判断矩阵的个判断行中确定最可靠判断行，以最可靠判断行为参照标准，对最大偏差元素进行校正，并给出修正的参照值.

2000-10-10 收稿，2000-11-13 修回。

1 校正原理

定义 1[3] 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为正互反矩阵,若其元素满足

$$a_{ij}>0, a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}, a_{ii}=1 \quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

定义 2[3] n 阶正互反矩阵 A 称为一致性矩阵,若其元素满足 $a_{ij}=a_{ik}/a_{jk}, i,j,k=1,2,\cdots,n$.

定义 3 设有判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,记 $a_{ij}^{(k)}=\dfrac{a_{kj}}{a_{ki}}$, $e_{ij}^{(k)}=\dfrac{a_{ij}^{(k)}}{a_{ij}}=\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}a_{ki}}$,称矩阵 $A_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ 为 A 的第 k 行生成的判断矩阵. $E_k=(e_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ 为 A 关于 A_k 的扰动矩阵. 显然,A_k,E_k 为一致性矩阵.

引理 1[3] 设矩阵 A 为一致性矩阵,则 n 为矩阵 A 的最大特征根.

引理 2[3] 设矩阵 A 为一致性矩阵,$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 为矩阵 A 关于特征根 n 的特征向量,则

$$A=(\frac{\omega_i}{\omega_j})_{n\times n}.$$

定理 1 判断矩阵 A 为一致性矩阵的充要条件是

$$E_k=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}, \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

证明 *必要性* 设 A 为一致性矩阵,由引理 1,$A=(\frac{\omega_i}{\omega_j})_{n\times n}$,于是

$$e_{ij}^{(k)}=\frac{a_{kj}}{a_{ij}a_{ki}}=\frac{\omega_k}{\omega_j}/\left[\frac{\omega_i}{\omega_j}\cdot\frac{\omega_k}{\omega_i}\right]=1,$$

从而 $$E_k=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}, \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

充分性 对给定的 E_k,设 $e_{ij}^{(k)}=\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}a_{ki}}=1(i,j=1,2,\cdots,n)$,于是对任意的 $i,j,l=1,2,\cdots,n$ 有 $\dfrac{a_{ij}}{a_{kj}}=\dfrac{a_{il}}{a_{kl}}=\dfrac{1}{a_{ki}}$,$\dfrac{a_{lj}}{a_{kj}}=\dfrac{a_{ll}}{a_{kl}}=\dfrac{1}{a_{kl}}$,从而 $a_{ij}=a_{il}\dfrac{a_{kj}}{a_{kl}}=a_{il}\dfrac{a_{lj}}{a_{ll}}=a_{il}a_{lj}=a_{il}/a_{jl}$,故 A 为一致性矩阵.

由定理 1 知,如果判断矩阵 A 为一致性矩阵,则生成矩阵 E_k 中的每个元素均为 1. 一般情况下,判断矩阵 A 并不是一致性矩阵,因而 E_k 中并不是每个元素都等于 1,但应该接近于 1. 如果偏差过大,则判断矩阵的一致性较差,导出的排序向量可靠程度低,就有可能导致决策的失误. 因此有必要对判断矩阵进行校正.

记 $b_{ij}^{(k)}=|e_{ij}^{(k)}-1|$,$e_i^{(k)}=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}^{(k)}$,$e_k=\sum\limits_{i=1}^{n}e_i^{(k)}$,$B_k=(b_{ij}^{(k)})_{n\times n}$,$C_k=(e_1^{(k)},e_2^{(k)},\cdots,c_n^{(k)})^T$.

定义 4 称 B_k 为判断矩阵 A 与生成矩阵 A_k 的偏差矩阵;$e_i^{(k)}$ 称为判断矩阵 A 第 i 行与第 k 行的偏差量;e_k 称为判断矩阵 A 与生成矩阵 A_k 的偏差量.

B_k,$e_i^{(k)}$,e_k 的实际意义为:假设判断矩阵 A 的第 k 行元素完全可靠,以第 k 行元素为基准判断,其它各行与第 k 行判断值的偏离程度. 如果 A 为一致性矩阵,则 $B_k=O$,$e_i^{(k)}=0$,$e_k=0$.

设 $e_i=\min\limits_{1\leqslant l\leqslant n}\{e_l\}$，则 A_i 与判断矩阵 A 偏差最小，此时可认为 A 的第 i 行元素最为可靠，以 A 的第 i 行元素为判断基准，从 E_i 中找出偏差最大的行，再从偏差最大的行中找出偏差最大的元素作为校正的对象.

2　校正方法与步骤

(1) 求判断矩阵 A 关于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的扰动矩阵 $E_1,E_2,\cdots,E_n$；

(2) 对每一 A_k，依次求出偏差矩阵 B_k，各行与第 k 行的偏差量 $e_i^{(k)}$，判断矩阵 A 与生成矩阵 A_k 的偏差量 $e_k(i,k=1,2,\cdots,n)$；

(3) 找出判断矩阵 A 可靠性最好的第 k 行；

(4) 找出 B_k 中偏差最大的第 i 行；

(5) 在 B_k 的第 i 行中找出产生偏差最大的元素 $b_{ij}^{(k)}$；

(6) 修改 a_{ij} 值，修改规则为：如果 $a_{ij}>a_{ik}/a_{jk}$，则将 a_{ij} 减小，否则将其增大. 使它的值跟 a_{ik}/a_{jk} 基本上一致，并尽可能使一致性指标 CR 达到最小，同时修改 a_{ji}，使 $a_{ji}=\dfrac{1}{a_{ij}}$；

(7) 对修改后的判断矩阵 A 进行一致性检验，如果 $CR<0.1$，则修改结束；如果 $CR\geqslant 0.1$，返回(1).

3　实例

例 $A=\begin{bmatrix}1 & 1/5 & 1/7 & 6 & 5\\ 5 & 1 & 1/2 & 6 & 8\\ 7 & 2 & 1 & 7 & 5\\ 1/6 & 1/6 & 1/7 & 1 & 3\\ 1/5 & 1/8 & 1/5 & 1/3 & 1\end{bmatrix}$，经检验，$CR=0.1616>0.1$，故 A 不具有满意的一致性.

校正：经计算得

$$B_1=\begin{bmatrix}0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000\\ 0.000 & 0.000 & 0.429 & 4.000 & 2.125\\ 0.000 & 0.300 & 0.000 & 5.000 & 6.000\\ 0.000 & 0.800 & 0.833 & 0.000 & 0.722\\ 0.000 & 0.680 & 0.857 & 2.600 & 0.000\end{bmatrix},\quad C_1=\begin{bmatrix}0.000\\ 6.554\\ 11.30\\ 2.356\\ 4.137\end{bmatrix},\quad e_1=24.346;$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0.000 & 0.000 & 0.300 & 0.800 & 0.680\\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000\\ 0.429 & 0.000 & 0.000 & 0.714 & 2.200\\ 4.000 & 0.000 & 0.417 & 0.000 & 0.556\\ 2.125 & 0.000 & 0.688 & 1.250 & 0.000\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}1.780\\ 0.000\\ 3.343\\ 4.972\\ 4.063\end{bmatrix},\quad e_2=14.158;$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0.000 & 0.429 & 0.000 & 0.833 & 0.857\\ 0.300 & 0.000 & 0.000 & 0.417 & 0.688\\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000\\ 5.000 & 0.714 & 0.000 & 0.000 & 0.762\\ 6.000 & 2.200 & 0.000 & 3.200 & 0.000\end{bmatrix},\quad C_3=\begin{bmatrix}2.119\\ 1.404\\ 0.000\\ 6.476\\ 11.40\end{bmatrix},\quad e_3=21.399;$$

$$B_4=\begin{bmatrix}0.000&4.000&5.000&0.000&2.600\\0.800&0.000&0.714&0.000&1.250\\0.833&0.417&0.000&0.000&3.200\\0.000&0.000&0.000&0.000&0.000\\0.722&0.556&0.762&0.000&0.000\end{bmatrix},\quad C_4=\begin{bmatrix}11.60\\2.764\\4.450\\0.000\\2.040\end{bmatrix},\quad e_4=20.854;$$

$$B_5=\begin{bmatrix}0.000&2.125&6.000&0.722&0.000\\0.680&0.000&2.200&0.556&0.000\\0.857&0.688&0.000&0.762&0.000\\2.600&1.250&3.200&0.000&0.000\\0.000&0.000&0.000&0.000&0.000\end{bmatrix},\quad C_5=\begin{bmatrix}8.847\\3.436\\2.307\\7.050\\0.000\end{bmatrix},\quad e_5=21.640.$$

由于$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\{e_i\}=e_2$,故认为判断矩阵$A$中第2行元素最为可靠,以第2行元素为判断基准对判断矩阵进行校正.又由C_2知,第4行元素的偏差最大,确定修改的第一个元素在第4行,再由B_2知第4行中偏差最大的元素位于第1列.修改a_{41},因$\frac{1}{6}=a_{41}<\frac{a_{42}}{a_{12}}=\frac{5}{6}$,将$a_{41}$由1/6增加为1,同时将$a_{14}$由6减少为1得新的判断矩阵:

$$A'=\begin{bmatrix}1&1/5&1/7&1&5\\5&1&1/2&6&8\\7&2&1&7&5\\1&1/6&1/7&1&3\\1/5&1/8&1/5&1/3&1\end{bmatrix}.$$

经检验,$CR=0.094<0.1$,经一次校正即可达到满意的一致性.如果要求判断矩阵A有更高的一致性,可对A'作进一步校正,经计算可得:

$$B_1'=\begin{bmatrix}0.000&0.000&0.000&0.000&0.000\\0.000&0.000&0.429&0.167&2.125\\0.000&0.300&0.000&1.000&6.000\\0.000&0.200&0.000&0.000&0.167\\0.000&0.680&0.857&0.400&0.000\end{bmatrix},\quad C_1'=\begin{bmatrix}0.000\\2.721\\7.300\\0.367\\1.937\end{bmatrix},\quad e_1'=12.325;$$

$$B_2'=\begin{bmatrix}0.000&0.000&0.300&0.200&0.680\\0.000&0.000&0.000&0.000&0.000\\0.429&0.000&0.000&0.714&2.200\\0.167&0.000&0.417&0.000&0.556\\2.215&0.000&0.688&1.250&0.000\end{bmatrix},\quad C_2'=\begin{bmatrix}1.180\\0.000\\3.343\\1.140\\4.063\end{bmatrix},\quad e_2'=9.726;$$

$$B_3'=\begin{bmatrix}0.000&0.429&0.000&0.000&0.857\\0.300&0.000&0.000&0.417&0.688\\0.000&0.000&0.000&0.000&0.000\\5.000&0.714&0.000&0.000&0.762\\6.000&2.200&0.000&3.200&0.000\end{bmatrix},\quad C_3'=\begin{bmatrix}1.286\\1.404\\0.000\\1.476\\11.40\end{bmatrix},\quad e_3'=15.566;$$

$$B_4'=\begin{bmatrix}0.000&0.167&0.000&0.000&0.400\\0.200&0.000&0.714&0.000&1.250\\0.000&0.417&0.000&0.000&0.000\\0.000&0.000&0.000&0.000&0.000\\0.667&0.556&0.762&0.000&0.000\end{bmatrix},\quad C_4'=\begin{bmatrix}0.567\\2.164\\3.617\\0.000\\1.985\end{bmatrix},\quad e_4'=8.333;$$

$$B_5' = \begin{bmatrix} 0.000 & 2.215 & 6.000 & 0.667 & 0.000 \\ 0.680 & 0.000 & 2.200 & 0.556 & 0.000 \\ 0.857 & 0.688 & 0.000 & 0.762 & 0.000 \\ 0.400 & 1.250 & 3.200 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}, \quad C_5' = \begin{bmatrix} 8.793 \\ 3.436 \\ 2.307 \\ 4.850 \\ 0.000 \end{bmatrix}, \quad e_5' = 19.384.$$

由于 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\{e_i'\} = e_4'$，故认为判断矩阵 A' 中第 4 行元素最为可靠，可以第 4 行元素为基准对判断矩阵进行校正. 又由 C_4' 知，第 3 行元素的偏差最大，确定修改的第二个元素在第 3 行，再由 B_2' 知第 3 行中偏差最大的元素位于第 5 列. 修改 a_{35}'，因 $a_{35}' = 5 < 21 = \frac{a_{34}'}{a_{54}'}$，故将其 5 增加为 9，同时将 a_{35}' 由 1/5 减少为 1/9 得新的判断矩阵：

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/7 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1/2 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 1 & 1/6 & 1/7 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/8 & 1/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

经检验，$CR = 0.0511 < 0.1$，故 A'' 具有更满意的一致性.

4　结语

本文所给出的判断矩阵校正方法可以提高一次性修改的成功率，例如对本文给出的算例，用文献[1] 提供的方法，第一次确定修改的元素为 a_{45} 与 a_{54}，修改后经检验 $CR = 0.1204 > 0.1$，用文献[2]提供的方法，第一次确定修改的元素为 a_{34} 与 a_{43}，修改后经检验 $CR = 0.1196 > 0.1$，第一次修改均未达到满意的一致性；而用本文提供的方法，第一次确定修改的元素为 a_{14} 与 a_{41}，修改后经检验 $CR = 0.094 < 0.1$，第一次修改就达到满意的一致性，但本文所提供的方法计算量稍大，借助计算机应用软件（如 EXCEL）可很好地解决这个问题.

本方法对三阶判断矩阵不适用. 因为对三阶判断矩阵，总有 $e_1 = e_2 = e_3$. 实际上，这对本文的成果并无影响，因为判断矩阵不具有满意的一致性多出现在参与两两比较的因素较多时（即判断矩阵的阶数较高时），对于二阶判断矩阵，在任何时候都是一致的，而对于三阶判断矩阵，因比较因素较少，可通过主观重新判断方法进行校正.

参考文献

1　刘万里，雷治军. 关于 AHP 中判断矩阵校正方法的研究. 系统工程理论和实践，1997，17 (6)：30～39.

2　刘万里. 一种校正判断矩阵的新方法. 系统工程理论和实践，1999，19 (9)：100～104.

3　王莲芬，许树柏. 层次分析法引论. 北京：中国人民大学出版社，1990.

（责任编辑：蒋汉明）