第 16 卷第 2 期　　广西科学院学报　　Vol. 16, No. 2
2000 年 5 月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　May 2000

8 个经典多色 Ramsey 数的新下界*

吴　康　　苏文龙　　罗海鹏

给定素数 $p\geqslant 5$，记 $Z_p=\{(1-p)/2,\cdots,-1,0,1,\cdots,(p-1)/2\}$，$Z_p^+=\{1,2,\cdots,(p-1)/2\}$. 约定 $|x-y|$ 表示先把 $x-y$ 取模 p 同余归结到 Z_p，再取绝对值归结到 Z_p^+.

定义 1　设 $\pi_n(S)=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 是 $S=Z_p^+$ 的一个 $n\geqslant 2$ 部分拆，记完全图 K_p 的顶点集 $V=Z_p$，K_p 的边集 E 是 Z_p 的所有 2 元子集组成的集并且有分拆 $\pi_n(E)=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$，这里 $E_i=\{\{x,y\}\in E:|x-y|\in S_i\}$，$1\leqslant i\leqslant n$.
称 E_i 中的边是用 S_i 色染色的，由 S_i 色边导出的子图 $G_p(S_i)=(Z_p,E_i)$ 称为关于参数集 S_i 的 p 阶循环图，它的团数记为 $[S_i]$.

上述定义给出了 p 阶完全图 K_p 的边的一个 n- 染色. 根据 Ramsey 定义容易得到

定理 1　$R([S_1]+1,[S_2]+1,\cdots,[S_n]+1\geqslant p+1.$ //

以下给出 8 个 p 阶完全图 K_p 的 3- 染色. 注意到 $S_3=S\backslash\{S_1,S_2\}$，因此只须写出参数集 S_1，S_2 就可以确定 $S=Z_p^+$ 的一个 3 部分拆 $\pi_3(S)$.

1) 给定素数 $p_1=73$，参数集

$S_1=\{1,3,5,17,19,21,23,30,32\}$,

$S_2=\{2,7,12,15,20,25,26,31,34\}$.

2) 给定素数 $p_2=173$，参数集

$S_1=\{1,4,14,17,19,24,26,29,32,35,37,44,60,71,80,82\}$,

$S_2=\{2,5,13,16,22,30,31,34,48,51,54,55,58,66,69,72,75,83\}$.

3) 给定素数 $p_3=193$，参数集

$S_1=\{1,3,5,19,29,33,37,46,50,59,61,68,77,81,89,91\}$,

$S_2=\{4,15,16,17,18,25,26,27,55,56,57,62,63,64,85,86,95,96\}$.

4) 给定素数 $p_4=277$，参数集

$S_1=\{7,9,10,22,23,28,34,36,40,67,71,75,86,87,88,91,92,106,112,117,130,133,136\}$,

$S_2=\{1,4,13,16,19,21,27,30,41,52,59,64,66,69,74,76,84,102,108,113,120,122,131\}$.

5) 给定素数 $p_5=197$，参数集

$S_1=\{1,4,12,14,19,21,29,32,34,39,45,47,54,56,62,67,69,80,82,97\}$,

$S_2=\{2,5,6,10,16,20,24,25,27,28,31,35,40,44,46,51,53,57,58,70,74,83,84,96\}$.

* 广西科学基金资助项目。

6) **给定素数** $p_6 = 331$,**参数集**

$S_1 = \{1,3,8,14,19,24,34,39,41,59,64,81,87,97,108,112,114,119,124,129,135,139,141,150,152\}$,

$S_2 = \{6,9,12,15,23,26,28,29,33,45,47,48,50,53,65,67,69,72,82,86,89,93,96,99,103,106,107,110,113,116,120,123,126,127,130,137,140,142,143,145,147,148,151,162,164\}$.

7) **给定素数** $p_7 = 409$,**参数集**

$S_1 = \{1,9,11,15,21,31,56,60,63,66,68,76,82,88,92,95,98,100,108,127,130,135,140,143,153,159,165,167,172,175,185,202\}$,

$S_2 = \{2,5,10,17,18,23,32,33,39,47,58,62,67,73,77,79,90,99,103,105,114,118,120,123,132,133,139,147,148,155,158,162,164,170,174,176,177,179,189,190,191,195,203,204\}$.

8) **给定素数** $p_8 = 173$,**参数集**

$S_1 = \{1,4,18,23,26,29,32,35,56,63,66,68,71,77,80,83\}$,

$S_2 = \{2,7,8,10,13,14,16,19,20,21,22,27,30,33,36,37,41,42,43,45,46,47,50,52,61,64,65,69,70,73,82,84\}$.

根据上述参数集,参照我们在文献 [1～7] **中所叙述的方法,得到**

定理 2 $R(3,3,7) \geqslant 74, R(3,3,12) \geqslant 174, R(3,3,13) \geqslant 194, R(3,3,16) \geqslant 278, R(3,4,10) \geqslant 198, R(3,4,14) \geqslant 332, R(3,4,15) \geqslant 410, R(3,5,7) \geqslant 174$.

上述第 1 **个结论超过了综述文献**[8]**的** $R(3,3,7) \geqslant 72$ **的已知记录,其他结论都是本文首次报道的.**

参考文献

1 Su Wenlong, Luo Haipeng, Zhang Zhengyou et al.. New lower bounds of fifteen classical Ramsey numbers. Australasian Journal of Combinatorics, 1999, 19: 91～99.

2 Su Wenlong, Luo Haipeng, Shen Yunqiu. New lower bounds for classical Ramsey numbers $R(5,13)$ and $R(5,14)$. Applied Mathematics Letters, 1999, 12 (6): 121～122.

3 **苏文龙, 罗海鹏, 李　乔. 多色经典** Ramsey **数** $R(q,q,\cdots,q)$ **的下界. 中国科学** (A **辑**), 1999, 29 (5): 408～413.

4 **罗海鹏, 苏文龙, 李　乔. 经典** Ramsey **数** $R(6,12)$, $R(6,14)$ **和** $R(6,15)$ **的新下界. 科学通报**, 1998, 43 (12): 1336～1337.

5 **苏文龙, 罗海鹏, 李　乔. 经典** Ramsey **数** $R(4,12)$, $R(5,11)$ **和** $R(5,12)$ **的新下界. 科学通报**, 1997, 42 (22): 2460.

6 **吴　康, 苏文龙, 罗海鹏. 经典** Ramsey **数** $R(4,23)$ **的下界. 广东民族学院学报**, 1997, 4: 6～7.

7 **吴　康, 苏文龙, 罗海鹏. 经典** Ramsey **数** $R(5,14)$ **的下界. 广西民族学院学报**, 1997, 3 (2): 119～120.

8 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 1994, DS1, updated on 05/07/1999.

(**第一作者单位: 广州华南师范大学**)