第 16 卷第 2 期 广西科学院学报 Vol. 16, No. 2
2000 年 5 月 Journal of Guangxi Academy of Sciences May 2000

$G.\ M.$ $_{(n+1\text{个顶点})}$的同胚类个数的计算公式

袁夫永

所谓“图式流形”即将一个图的每个顶点都换为流形，把每个边都换为相应流形与单位闭区间的拓扑积。本文所论“图式流形”，是将顶点都换为圆周，把每个边都换为管($S^1 \times I$)。管与圆周“衔接”时，映射度规定为 $+1$ 或 -1。我们把原来的图称为该图式流形的缩影。把缩影为 f 的图式流形简记为 $G.M.f$.

对于本文所论及的这类图式流形，可规定边的符号（正号或负号），它取决于其两端的映射度（相同或相异）。已经证明[1]，将某个顶点圆改变方向，是一个同胚变形，且相当于把与该顶点（圆）相关联的所有边改变符号。且称此同胚变形为顶点的扭转运算。已经证明[1]，一个同胚变形是一个图式流形的自同胚变形的充要条件，本质上是顶点的扭转运算。

关于 $G.M.$ ▲、$G.M.$ ▲ 及 $G.M.$ ▲ 的拓扑分类问题，在文献[2]和文献[3]中已经解决，今对一般情形，即 $G.M.$ $▲_{(n+1\text{个顶点})}$ 的拓扑分类，推导简单的计算个数的公式。

在 $G.M.$ $▲_{(n+1\text{个顶点})}$ 中，如果某个辐射边是负的，扭转它的外端点，即变为正的。由于同胚必是局部同胚，所以所论图式流形的同胚分类，等价于相应的 n 边形的负边分布。即该图式流形的自同胚类集合与以该 n 边形的负边分布为元素的集合是等势的($n > 3$)。

设 G 是自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的圆形排列的旋转群，集合 Ω 是所有可能的排列，见表 1：

根据 Burnside 引理，所论图式流形的自同胚类的个数为：

$$\frac{1}{2n}\left[\sum_{d|n}\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}+\beta\right],$$

$n > 3$.

这里 $\Phi(d)$ 是欧拉函数，表示满足 $r < d$，且 $(r, d) = 1$ 的自然数 r 的个数，G_Ω 是旋转群 G 对应于集 Ω 上的置换群。

表 1 旋转群 G 的元素对应的稳定点个数及总数

旋转群 G 的元素	元素的个数	对应于 G_Ω 中某置换在 Ω 中稳定点个数及总数
顺时针旋转	$\sum_{d\|n}\Phi(d)$	$\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}$, $\sum_{d\|n}\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}$
反射旋转	$2m$(当 $n=2m$) $2m+1$(当 $n=2m+1$)	2^m 或 2^{m+1}, $\beta = 3m\cdot 2^m$ 2^{m+1}, $\beta = (2m+1)\cdot 2^{m+1}$
总　数	$2n$	$\sum_{d\|n}\Phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}+\beta$

参考文献

1 Liu Yaxing, Li Qisheng. Graphlike manifolds, Chinese Journal of Math, 1996, 9 (4): 46～51.

2 Yuan Fuyong. A simple method for computing the homeomorphism class of $G.M.$ ▲ and $G.M.$ ▲. Chinese Journal of Math, 1996, 11 (1): 76～77.

3 Yuan Fuyong. The homeomorphism classfication of $G.M.$ $▲_{2k+2\ \text{vertices}}$, Chinese Quar of Math, 1996, 11 (2): 60～63.

（作者单位：广西职业技术学院）