第 16 卷第 2 期
2000 年 5 月
广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences
Vol. 16, No. 2
May 2000

一类具有时滞模型的平稳周期振荡

On the Existence and Stability of Periodic Solutions for a Class of Equations with Delay

秦发金
Qin Fajin
(柳州师范专科学校数学系 柳州 545003)
(Dept. of Math., Liuzhou Teachers College, Liuzhou, 545003)

欧伯群
Ou Boqun
(钦州师范专科学校数学系 钦州 535000)
(Dept. of Math., Qinzhou Teachers College, Qinzhou, 535000)

摘要 研究一类具有时滞模型：$\dot{u}_i(t)=-b_i(t)u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(t)f_j(u_j(t-\tau))+I_i(t,u_i)$ 的周期振荡，利用重合度和 V-泛函方法，得到了该模型存在唯一稳定的周期振荡条件、推广和改进了文献[1]的结果.

关键词 时滞 周期振荡 重合度
中图法分类号 O 174

Abstract By using coincidence degree and Liapunov functional, some sufficient conditions are obtained for the existence, uniqueness and stability of periodic solutions for a class of equations with delay: $\dot{u}_i(t)=-b_i(t)u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(t)f_j(u_j(t-\tau))+I_i(t,u_i)$.

Key words delay, periodic oscillation, coincidence-degree

1 引理

文献[1]讨论了一类具有周期输入的时滞 Hopfield 型神经网络：

$$\dot{u}_i(t)=-b_i(t)u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(t)f_j(u_j(t-\tau))+I_i(t),$$

其中 $b_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$；$f_j(u_j(t)),(j=1,2,\cdots,n)$ 为连续的非线性激励函数，T_{ij} 为模拟神经元之间互联的突触特性，从实际背景看，由于网络的老化和更新，T_{ij} 一般不是常数，而是随时间变化的函数(即 $T_{ij}(t)$ 函数)，f 的转换作用也不是瞬时完成的，而是具有一定的滞后. 考虑到生态系统环境周期性变化或干扰，本文研究更一般的时滞模型：

$$\dot{u}_i(t)=-b_i(t)u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(t)f_j(u_j(t-\tau))+I_i(t,u_i), \tag{1}$$

1999-12-28 收稿，2000-04-12 修回。

其中 $\tau>0$ 为时滞，$b_i(t),T_{ij}(t),I_i(t,u_i)$ 为连续的 w 周期函数，$f_j(u_j)$ 为连续函数 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，并证明，在适当条件下，模型(1) 存在唯一渐近稳定的周期解(平稳周期振荡).

为了叙述方便，令 $u=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^T$

$f(u(t-\tau))=(f_1(u_1(t-\tau)),f_2(u_2(t-\tau)),\cdots,f_n(u_n(t-\tau)))^T$,

$I(t,u)=(I_1(t,u_1),I_2(t,u_2),\cdots,I_n(t,u_n))^T$,

$$B(t)=\begin{bmatrix} b_1(t) & & & \\ & b_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n(t)\end{bmatrix};\quad T(t)=\begin{bmatrix} T_{11}(t) & T_{12}(t) & \cdots & T_{1n}(t)\\ T_{21}(t) & T_{22}(t) & \cdots & T_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n1}(t) & T_{n2}(t) & \cdots & T_{nn}(t)\end{bmatrix}.$$

则模型(1) 可化为 $\dot u(t)=-B(t)u(t)+T(t)f(u(t-\tau))+I(t,u)$, (2)

考虑 Banach 空间 X 中的算子方程：$Lu=\lambda Nu;\lambda\in[0,1]$,

这里 $L:\mathrm{Dom}L\cap X\to X$ 是线性算子，$\lambda\in[0,1]$ 为参数.

令 P,Q 为两个投影算子；$P:\mathrm{Dom}L\cap X\to\ker L,Q:X\to X/\mathrm{Im}L$,

则有如下引理：

引理[3] 假设 X 为 Banach 空间，L 是指标为零的 Fredholm 算子，$N:\overline{\Omega}\to X$ 在 $\overline{\Omega}$ 上 L 紧，其中 Ω 为 X 中的有界开集，进一步假设

(a)$Lu\neq\lambda Nu,\forall\ \lambda\in(0,1),\forall\ u\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom}L$,

(b)$QNu\neq 0,\forall\ u\in\partial\Omega\cap\ker L$,

(c)$\deg\{QNu,\Omega\cap\ker L,0\}\neq 0$,

则 $Lu=Nu$ 在 Ω 中至少有一解.

设 $X=\{u(t)\in c(R,R^n),u(t+w)=u(t)\}$，定义其模为 $\|u\|=\max\limits_{[0,w]}|u(t)|$，则 X 在这个模及通常内积下成为 Banach 空间，又令

$Lu=\dot u(t),Nu=-B(t)u(t)+T(t)f(u(t-\tau))+I(t,u)$,

投影算子 P,Q 取为：$Pu=Qu=\dfrac{1}{w}\displaystyle\int_0^w u(t)\mathrm{d}t,u(t)\in X$,

易证，L 是指标为零的 Fredholm 算子，N 在 $\overline{\Omega}$ 上 L 紧，其中 Ω 为 X 中的有界开集，对应算子方程：$Lu=\lambda Nu,\lambda\in[0,1]$,

有 $\dot u=\lambda(-B(t)u+T(t)f(u(t-\tau))+I(t,u))\quad\lambda\in[0,1]$,

当 $\lambda=1$ 时，上式即为要研究的方程(2).

2 结果

记 $K=\max\limits_{[0,w]}\|T(t)\|$，$\|T(t)\|$ 为矩阵 $T(t)$ 的模，

定理 1 假设存在常数 $b>0,c_1>0,d_1>0,c_2>0,d_2>0$，且 $kc_1+c_2<b$ 满足条件：

1)$|f(t,u)|\leqslant c_1|u|+d_1,\forall\ u\in R^n$,

2)$|I(t,u)|\leqslant c_2|u|+d_2,\forall\ u\in R^n$,

3)$B(t)\geqslant bI$(I 为单位矩阵)，

则方程(2) 至少有一个 w 周期解.

证明 考虑算子方程：$Lu=\lambda Nu,\lambda\in(0,1)$,

即 $\dot u=\lambda(-B(t)u+T(t)f(u(t-\tau)+I(t,u)),\lambda\in(0,1)$, (3)

设 $u(t)$ 是(3) 的任一 w 周期解,下面证明 $u(t)$ 关于 λ 一致有界,

(3) 式两边同乘以 $u(t)$,并从 0 到 w 积分得

$$0=\int_0^w u^T\dot{u}\mathrm{d}t=-\lambda\int_0^w u^TB(t)u\mathrm{d}t+\lambda\int_0^w u^TT(t)f(u(t-\tau))\mathrm{d}t+\lambda\int_0^w u^TI(t,u)\mathrm{d}t,$$

于是有 $b\int_0^w|u|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^w|u^TT(t)f(u(t-\tau))|\mathrm{d}t+\int_0^w|u^TI(t,u)|\mathrm{d}t\leqslant k\int_0^w|u|(c_1|u(t-\tau)|+d_1)\mathrm{d}t+\int_0^w|u|(c_2|u|+d_2)\mathrm{d}t=kc_1\int_0^w|u||u(t-\tau)|\mathrm{d}t+c_2\int_0^w|u|^2\mathrm{d}t+(kd_1+d_2)\int_0^w|u|\mathrm{d}t\leqslant kc_1(\int_0^w|u|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}(\int_0^w|u(t-\tau)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}+c_2\int_0^w|u|^2\mathrm{d}t+(kd_1+d_2)\int_0^w|u|\mathrm{d}t).$

由 $u(t-\tau)$ 的周期性可知:$\int_0^w|u(t-\tau)|\mathrm{d}t=\int_0^w|u(t)|\mathrm{d}t$,

从而有 $b\int_0^w|u(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant(kc_1+c_2)\int_0^w|u(t)|^2\mathrm{d}t+(kd_1+d_2)\int_0^w|u(t)|\mathrm{d}t\leqslant(kc_1+c_2)\int_0^w|u(t)|^2\mathrm{d}t+(kd_1+d_2)\sqrt{w}(\int_0^w|u(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$,

则有 $(b-kc_1-c_2)\int_0^w|u(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant(kd_1+d_2)\sqrt{w}(\int_0^w|u(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$,

即有
$$\int_0^w|u(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{kd_1+d_2}{b-kc_1-c_2}\right)^2w\triangleq R_1. \tag{4}$$

由(4) 式知,$\exists\ t_0\in[0,w]$,使得 $|u(t_0)|\leqslant\sqrt{\frac{R_1}{w}}$.

于是 $u(t)=u(t_0)+\int_{t_0}^t\dot{u}(s)\mathrm{d}s,t\in[0,w]$,

$$|u(t)|\leqslant|u(t_0)|+\int_0^w|\dot{u}(t)|\mathrm{d}t, \tag{5}$$

又有(3) 式直接可得

$$\int_0^w|\dot{u}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^w|B(t)u|\mathrm{d}t+\int_0^w|T(t)f(u(t-\tau))|\mathrm{d}t+\int_0^w|I(t,u)|\mathrm{d}t\leqslant\|B(t)\|\int_0^w|u|\mathrm{d}t+k\int_0^w(c_1|u(t-\tau)|+d_1)\mathrm{d}t+\int_0^w(c_2|u|+d_2)\mathrm{d}t=(\|B(t)\|+kc_1+c_2)\int_0^w|u|\mathrm{d}t+(kd_1+d_2)w\leqslant(\|B(t)\|+kc_1+c_2)\sqrt{w}(\int_0^w|u|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}+(kd_1+d_2)w\leqslant(\|B(t)\|+kc_1+c_2)\sqrt{R_1w}+(kd_1+d_2)w\triangleq R_2, \tag{6}$$

由(5)、(6) 式可得:
$$|u(t)|\leqslant\sqrt{\frac{R_1}{w}}+R_2\triangleq R_3. \tag{7}$$

令 $R_0=\max\{R_3,\frac{kd_1+d_2}{b-kc_1-c_2}\}$,$\Omega=\{u(t)\in X|\ \|u(t)\|<R_0\}$,

则当 $u\in\partial\Omega\cap\ker L$ 时,显然有 $Lu\neq\lambda Nu,\lambda\in(0,1)$,

即引理的条件(a) 成立,又对 $\forall\ u\in\partial\Omega\cap\ker L$ 时,u 为常数,即 $|u|=R_0$,且有

$$u^T(QNu)=-u^TB(t)u+u^TT(t)f(u)+u^TI(t,u)\leqslant-b|u|^2+kc_1|u|^2+kd_1|u|+c_2|u|^2+d_2|u|=-(b-kc_1-c_2)|u|^2+(kd_1+d_2)|u|<0,$$

故当 $u\in\partial\Omega\cap\ker L$ 时,$QNu\neq 0$,即引理的条件(b) 成立.

又令 $F(\mu,u)=-\mu u+(1-\mu)QNu$,

则当 $u \in \partial\Omega \cap \ker L$ 时，$u^T F(\mu, u) < 0$，由同伦不变性知

$$\deg\{QNu, \Omega \cap \ker L, 0\} = \deg\{-u, \Omega \cap \ker L, 0\} \neq 0,$$

即引理的条件(c)成立. 因此，由引理知，$Lu = Nu$ 在 X 中至少有一个解，即方程(2)至少存在一个 w 周期解.

定理 2 假设定理 1 的条件成立，且满足

$$|f_i'(u_i)| \leqslant \delta, (i = 1, 2, \cdots, n), \left|\frac{\partial I_i}{\partial u_i}\right| \leqslant l, (i = 1, 2, \cdots, n),$$

当下列条件之一成立：

(i) $k\delta + l < b$, (ii) $\frac{1}{2}k(1 + \delta^2) + l < b$,

(iii) $\frac{1}{2}\delta(1 + k^2) + l < b$, (iv) $\frac{1}{2}(k^2 + \delta^2) + l < b$,

则方程(2)的 w 周期解唯一且是渐近稳定的.

证明 设 $\bar{u}(t)$ 是(2)的 w 周期解，$u(t)$ 是(2)的任一解，则有

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}}(t) = -B(t)\bar{u}(t) + T(t)f'(\bar{u}(t-\tau)) + I(t, \bar{u}) \\ \dot{u}(t) = -B(t)u(t) + T(t)f'(u(t-\tau)) + I(t, u) \end{cases},$$

令 $y(t) = u(t) - \bar{u}(t)$，可得

$$\dot{y}(t) = -B(t)y(t) + f'(\xi(t))y(t-\tau) + I_u'(t, \eta(t), y(t)), \tag{8}$$

其中 $f'(\xi(t)) = (f_1'(\xi_1(t)), \cdots, f_n'(\xi_n(t)))^T$，$\xi_i(t)$ 介于 $\bar{u}_i(t-\tau)$ 与 $u_i(t-\tau)$ 之间，$i = 1, 2, \cdots, n$.

$\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots, \eta_n(t))^T$，$\eta_i(t)$ 介于 $\bar{u}_i(t)$ 与 $u_i(t)$ 之间，$i = 1, 2, \cdots, n$.

(Ⅰ) 设条件(i)成立，考虑 Liapunov 泛函为

$$V_1(t) = V_1(y)(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}k\delta\int_{t-\tau}^{t} y^2(s)\mathrm{d}s, \tag{9}$$

则有

$$\dot{V}_1|_{(8)} = y^T(t)(-B(t)y(t) + T(t)f'(\xi(t))y(t-\tau) + I_u'(t, \eta(t))y(t)) + \frac{1}{2}k\delta y^2(t) - \frac{1}{2}k\delta y^2(t-\tau) \leqslant -by^2(t) + k\delta|y(t)||y(t-\tau)| + ly^2(t) + \frac{1}{2}k\delta y^2(t) - \frac{1}{2}k\delta y^2(t-\tau) \leqslant (-b + l + \frac{1}{2}k\delta)y^2(t) + \frac{1}{2}k\delta(y^2(t) + y^2(t-\tau)) - \frac{1}{2}k\delta y^2(t-\tau) = -(b - k\delta - l)y^2(t). \tag{10}$$

由(10)式可得

$$V_1(y)(t) + (b - k\delta - l)\int_0^t y^2(s)\mathrm{d}s \leqslant V_1(y)(0) \quad 则 \quad \int_0^{\infty} y^2(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

由定理 1 的证明可知，$u(t)$，$\bar{u}(t)$ 在$(0, +\infty)$有界，于是可推出 $y(t)$ 与 $\dot{y}(t)$ 在$(0, +\infty)$有界，从而 $y^2(t)$ 在$(0, +\infty)$一致连续，由 Barbalat 引理[2]，可知$\lim\limits_{t\to\infty} y^2(t) = 0$，即$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$，故方程(2)的 w 周期解唯一且是渐近稳定的.

(Ⅱ) 设条件(ii)，(iii)，(iv)成立时，分别考虑 Liapunov 泛函为

$$V_2(t) = V_2(y)(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}k\int_{t-\tau}^{t} y^2(s)\mathrm{d}s, \tag{11}$$

$$V_3(t) = V_3(y)(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}\delta\int_{t-\tau}^{t} y^2(s)\mathrm{d}s, \tag{12}$$

$$V_4(t) = V_4(y)(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}k^2\int_{t-\tau}^{t} y^2(s)\mathrm{d}s, \tag{13}$$

用类似于(Ⅰ)的分析,估计方法进行化简得

$$\dot{V}_2|_{(8)} \leqslant -(b - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k\delta^2 - l)y^2(t), \tag{14}$$

$$\dot{V}_3|_{(8)} \leqslant -(b - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}k^2\delta - l)y^2(t), \tag{15}$$

$$\dot{V}_4|_{(8)} \leqslant -(b - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}\delta^2 - l)y^2(t), \tag{16}$$

利用(14)、(15)、(16)式仿(Ⅰ)可证本定理结论成立.

参考文献

1 黄先开. 具有时滞的 Hopfield 型神经网络的平稳周期振荡. 应用数学和力学,1999,10:1040～1044.

2 Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic publishers,1992.

3 Gaines R E,Mauhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations. Tecture notes in math, Berlin: Springer-Verlsg,1977. 567.

(责任编辑:邓大玉)