第 16 卷第 2 期 广西科学院学报 Vol. 16, No. 2
2000 年 5 月 Journal of Guangxi Academy of Sciences May 2000

一类非线性系统概周期解的存在唯一性

On the Existence and Uniqueness of Almost Periodic Solutions for a Class of Nonlinear Systems

庄兴义
Zhuang Xingyi

（梧州师范专科学校数学系 广西贺州 542800）
(Dept. of Mathematics, Wuzhou Teachers College, Hezhou, Guangxi, 542800)

摘要 用渐近概周期函数法研究一类非线性微分方程：$x' = A(t,x)x + g(t,x)$ 的概周期解的存在唯一性，得到保证该方程存在唯一概周期的充分性条件.
关键词 非线性方程 概周期解 存在唯一性
中图法分类号 O 175.1
Abstract The approximation almost periodic function method was used to study the existence and uniqueness of almost periodic solution of a class of nonlinear differential equations: $x' = A(t,x)x + g(t,x)$. A sufficient condition is obtained.
Key words nonlinear differential equation, almost periodic solution, existence and uniqueness

非线性微分方程解的各种性态，由于有着很强的实际应用背景，一直是理论工作者研究的重要课题. 本文运用渐近概周期函数法研究方程（1）概周期解的存在性及唯一性.

考虑非线性微分方程

$$x' = A(t,x)x + g(t,x), \tag{1}$$

其中 $t \in R, x \in R^n, A(t,x) = (a_{ij})_{n\times n}$ 是连续的函数矩阵，这里 $a_{ij} = a_{ij}(t,x), g(t,x)$ 是 $R \times R^n$ 上的一个 n 维连续函数. 文献[1,2]研究了方程(1)周期解的存在性问题；文献[3]运用指数二分法和算子理论得到了下述结果：

定理 设 $A(t,x)$ 在 $R \times S$ 上一致连续，S 为 R^n 中任一紧集，又存在实对称非奇异矩阵 $p(t) \in C'$ 使得：

1) 存在常数 ρ 使对一切 $t \in R$ 有 $|p(t)| < \rho$；

2) $p(t)$ 的特征根 $\lambda_i(t)$ 满足 $|\lambda_i(t)| \geqslant \mu > 0$，$\mu$ 为某常数，$i = 1,2,\cdots,n$. 设 $p(t)$ 有 k 个特征根为负，$n-k$ 个为正；

3) 对称矩阵 $M(t,x) = p(t)A(t,x) + A^*(t,x)p(t) + p'(t)$ 的所有特征根，$\mu_i(t,x), i =$

1999-03-26 收稿，2000-01-06 修回。

$1,2,\cdots,n$,对 $|x| \leqslant R_0, t \in R$ 满足 $\mu_i(t,x) \leqslant -\delta < 0$,$\delta$ 和 R_0 均为常数;

4) $\frac{1}{R_0}\sup\limits_{|x|\leqslant R_0, t\in R}|g(t,x)| \leqslant \delta\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}/4\rho M$,

则方程(1)至少有一概周期解.

本文运用渐近概周期函数法不但研究了方程(1)概周期解的存在性,而且研究了唯一性.相比之下,我们的条件较为容易验证.

定义 1 设 $f(t,x) \in C(R\times\Omega, R^n)$,$\Omega \subseteq R^n$ 是开集,若对 $\forall\ \varepsilon > 0$ 和 Ω 中的任意紧集 S,存在 $l = l(\varepsilon, S) > 0$,使得任一长度为 l 的区间中至少有一个 τ 满足

$$|f(t+\tau,x) - f(t,x)| < \varepsilon,$$

对 $\forall\ t \in R$ 和 $\forall\ x \in S$ 成立,则称 $f(t,x)$ 关于 t 对 $x \in \Omega$ 是一致概周期的.

由定义可知,周期函数是概周期函数的特例.

定义 2 若 $f(t)$ 是由一个连续概周期函数 $p(t)$ 和一个定义在 R^+ 上,当 $t\to\infty$ 时趋于 0 的连续函数 $q(t)$ 之和,即

$$f(t) = p(t) + q(t),$$

则称 $f(t)$ 是一个渐近概周期函数.

一个概周期函数 $f(t)$ 的平均值记为 $M(f)$,即 $M(f) = \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$,对于 $x \in R^n$,取其范数 $\|x\| = \sum\limits_{j=1}^n |x_j|$,对于矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,取它的范数为 $\|A\| = \sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$.

对于方程(1),我们假定下述条件成立.

(i) $A(t,x)$ 是关于 t 对 $x \in S$(这里 S 是 R^n 中的任一紧集)一致概周期的 $n\times n$ 函数矩阵,$g(t,x)$ 也是关于 t 对 $x \in S$ 一致概周期的;

(ii) 记 $\alpha = \alpha(t,x) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{a_{jj}(t,x) - \sum\limits_{i=1,i\neq j}^n |a_{ij}(t,x)|, t\in R, x\in R^n\}$,且 $M(\alpha) = a_1 > 0$;

(iii) 存在一个非负概周期函数 $b(t)$ 满足 $M(b(t)) = b_1 < a_1$(a_1 由条件(ii)给出)使得对 $\forall\ t \in R$,x 和 $y \in R^n$ 都有下式成立:

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \leqslant b(t)\|x - y\|.$$

定理 1 假设条件(i)~(iii)成立,则方程(1)存在唯一概周期解.

在证明定理 1 之前,先叙述文献[4]中的一个有用的引理.

引理 1 设 $f(t)$ 是一个概周期函数,若 $M(f) = -\gamma < 0$,则对 $\forall\ \tau \in R$ 有

$$\exp\left(\int_s^t f(u+\tau)\mathrm{d}u\right) \leqslant \beta\exp(-\alpha(t-s)), t \geqslant S,$$

其中 α、β 是不依赖于 τ 的正常数.

定理 1 的证明:

因为 $g(t,0)$ 是概周期函数,所以存在着正常数 L,使得 $\|g(t,0)\| \leqslant L$.

设 $x(t)$ 是方程(1)的任一解,考虑 V 函数

$$V(t) = -\|x(t)\| = -\sum_{i=1}^n |x_i(t)|, \tag{2}$$

于是沿着方程(1)的解计算 $V(t)$ 的导数,有

$$V'(t) = -\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} x_i(t)\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} x_i(t)\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + g_i(t,x)\right) \leqslant -a_{11}|x_1(t)| +$$

$|a_{12}||x_2(t)| + \cdots + |a_{1n}||x_n(t)| + |a_{21}||x_1(t)| - a_{22}|x_2(t)| + |a_{23}|x_3(t)| + \cdots + |a_{2n}||x_n(t)| + \cdots + |a_{n1}||x_1(t)| + \cdots + |a_{nn-1}||x_{n-1}(t)| - a_{nn}|x_n(t)| + \| g(t,x) \| \leqslant -\sum_{j=1}^{n}(a_{jj} - \sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|)|x_j(t)| + \| g(t,x) - g(t,0) \| + \| g(t,0) \| \leqslant -\alpha(t,x)\sum_{j=1}^{n}|x_j(t)| + b(t)\| x(t) \| + L = (\alpha(t,x) - b(t))V(t) + L,$ (3)

其中 $a_{ij} = a_{ij}(t,x).\ \mathrm{sgn}x_i(t) = \begin{cases}1, & x_i(t) > 0,\\ -1, & x_i(t) < 0.\end{cases}$

设 $t \leqslant 0$,在区间$[t,0]$ 上积分上式得

$$V(0) - V(t)\ \exp\ (\int_t^0(\alpha(\tau,x) - b(\tau))\ \mathrm{d}\tau \leqslant L\int_t^0\exp(\int_s^0(\alpha(\tau,x) - b(\tau))\ \mathrm{d}\tau)\ \mathrm{d}s.$$

即有

$$-V(t) \leqslant -V(0)\exp(-\int_t^0(\alpha(\tau,x) - b(\tau))\mathrm{d}\tau + L\int_t^0\exp(-\int_t^s(\alpha(\tau,x) - b(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,$$

即

$$\| x(t) \| \leqslant \| x(0) \| \exp(-\int_t^0(\alpha(\tau,x) - b(\tau))\mathrm{d}\tau) + L\int_t^0\exp(-\int_t^s(\alpha(\tau,x) - b(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\quad (t \leqslant 0).$$

因为 $M(-\alpha + b(t)) = -M(\alpha) + M(b(t))$,故由定理条件得　$M(-\alpha + b(t)) = -a_1 + b_1 < 0$.

由引理 1 可知存在正常数 α,β 使得

$$\exp -\int_t^s(\alpha(\tau,x) - b(\tau))\mathrm{d}\tau \leqslant \beta\exp(-\alpha(s-t)),(s \geqslant t).$$

由此推得

$$\| x(t) \| \leqslant \| x(0) \| \exp(\alpha t) + L\int_t^0\beta\exp(-\alpha(s-t))\mathrm{d}s = \beta \| x(0) \| + \frac{L\beta}{\alpha}(1 - \exp(\alpha t)) \leqslant \beta \| x(0) \| + \frac{L\beta}{\alpha},(t \leqslant 0).$$

因此,方程(1) 的任一解 $x(t)$ 当 $t \leqslant 0$ 时有界.无妨设此界为 K_0,即对 $t \leqslant 0$ 有 $\| x(t) \| \leqslant K_0$.

现在取 $\tau_j < 0(j = 1,2,\cdots)$ 且 $\tau_j \to -\infty(j \to +\infty)$,由于$\{x(\tau_j)\}$ 是一个有界序列,故存在$\{\tau_j\}$ 的一个子序列(不妨仍记为$\{\tau_j\}$) 是收敛的.记 $S = \{x;x \in R^n$ 且 $\| x \| \leqslant K_0\}$,因为 $g(t,x)$ 关于 t 对 $x \in S$ 是一致概周期的,$A(t,x)$ 也是关于 t 对 $x \in S$ 一致概周期函数矩阵,故存在子序列$\{t_k\} \subset \{\tau_j\}$ 使得$\{g(t + t_k,x\}$ 以及$\{A(t + t_k,x\}$ 在 $R \times S$ 上一致收敛:

下面证明$\{x(t + t_k)\}$ 在 R^- 上是一致收敛的.

记 $Z_k(t) = x(t + t_k)$,则 $Z_k(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = A(t + t_k,Z)Z + g(t + t_k,Z),\tag{4}$$

过点$(0,x(t_k))$ 的解,且当 $t \leqslant 0$ 时,$\| Z_k(t) \| \leqslant K_0$.

记 $W(t) = -\| x(t + t_k) - x(t + t_m) \| = -\sum_{i=1}^{n}|x_i(t + t_k) - x_i(t + t_m)|$,

于是沿着(4) 式的解计算 $W(t)$ 的导数得

$$W'(t) = -\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(x_i(t + t_k) - x_i(t + t_m))(\frac{\mathrm{d}x_i(t + t_k)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_i(t + t_m)}{\mathrm{d}t}) = -\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(x_i(t + t_k) - x_i(t + t_m))\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t + t_k,x(t + t_k))x_j(t + t_k) - \sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t + t_m,x(t + t_m))x_j(t + t_m)$$

$+ g_i(t+t_k,x(t+t_k)) - g_i(t+t_m,x(t+t_m)))\} = -\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(x_i(t+t_k)-x_i(t+t_m))\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t + t_k,x(t+t_k)(x_j(t+t_k)-x_j(t+t_m)) + \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(t+t_k,x(t+t_k)) - a_{ij}(t+t_m,x(t+t_m))x_j(t + t_m)) + (g_i(t+t_k,x(t+t_k)) - g_i(t+t_k,x(t+t_m))) + (g_i(t+t_k,x(t+t_m)) - g_i(t+t_m, x(t+t_m))) \leqslant -\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}(t+t_k,x(t+t_k)) - \sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}(t+t_k,x(t+t_k))\}\|x_j(t+t_k)-x_j(t + t_m)\| + \|A(t+t_k,x(t+t_k)) - A(t+t_m,x(t+t_m))\|\|x(t+t_m)\| + \|g(t+t_k,x(t + t_k)) - g(t+t_k,x(t+t_m))\| + \|g(t+t_k,x(t+t_m)) - g(t+t_m,x(t+t_m))\| \leqslant -\alpha(t + t_k,x(t+t_k))\|x(t+t_k)-x(t+t_m)\| + b(t+t_k)\|x(t+t_k)-x(t+t_m))\| + k_0N_1 + N_2 = [\alpha(t+t_k,x(t+t_k)) - b(t+t_k)]W(t) + k_0N_1 + N_2,$ (5)

其中 $N_1 = \sup_{t\leqslant 0,x\in s}\{\|A(t+t_k,x(t+t_k)) - A(t+t_m,x(t+t_m))\|\}$;

$N_2 = \sup_{t\leqslant 0,x\in s}\{\|g(t+t_k,x(t+t_m)) - g(t+t_m,x(t+t_m))\|\}.$

对 $t\leqslant 0$,积分(5)式立即可以推出

$$\|x(t+t_k)-x(t+t_m)\| \leqslant \beta\|x(t_k)-x(t_m)\| + \frac{\beta(k_0N_1+N_2)}{\alpha}. \tag{6}$$

因为$\{x(\tau_j)\}$收敛,故对 $\forall\ \varepsilon>0$,存在自然数 A_1 充分大使得当 k 和 $m>A_1$ 时有

$$\|x(t_k)-x(t_m)\| < \frac{\varepsilon}{3\beta}. \tag{7}$$

又$\{A(t+t_k,x(t+t_k))\}$在 $R\times S$ 上也一致收敛,因此,存在自然数 A_2 充分大使得当 k 和 $m>A_2$ 时有

$$N_1 < \frac{\varepsilon\alpha}{3\beta k_0}. \tag{8}$$

又由于$\{g(t+t_k,x(t+t_k))\}$在 $R\times S$ 上也是一致收敛的.因此又存在自然数 A_3 充分大使得当 k 和 $m>A_3$ 时有

$$N_2 < \frac{\varepsilon\alpha}{3\beta}. \tag{9}$$

我们取 $A=\max\{A_1,A_2,A_3\}$,则由(6)~(9)式可知当 k 和 $m>A$ 时有

$$\|x(t+t_k)-x(t+t_m)\| < \beta\frac{\varepsilon}{3\beta} + \frac{k_0\beta}{\alpha}\cdot\frac{\varepsilon\alpha}{3\beta k_0} + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\varepsilon\alpha}{3\beta} = \varepsilon \quad (t\leqslant 0). \tag{10}$$

这说明$\{x(t+t_k)\}$在 R^- 上一致收敛,因此,$x(t)$是方程(1)的一个渐近概周期解.由文献[3]定理2.1,$x(t)$的概周期部分即是方程(1)的概周期解.

现在再设 $\varphi_1(t)$ 及 $\varphi_2(t)$ 是方程(1)的两个不同的概周期解,因此,存在正常数 B 使得. $\sup_{t\in R}\{\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|\} < B$.另一方面,记

$U(t) = -\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|$,相仿上述证明过程可知

$$U'(t) \leqslant [\alpha(t,x) - b(t)]U(t). \tag{11}$$

于是有

$$-U(s) \leqslant -U(t)\exp\left(-\int_s^t[\alpha(\tau,x)-b(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\right) \leqslant -U(t)\beta\exp(-\alpha(t-s)),(t\geqslant s),$$

(下转第61页 Continue on page 61)

(上接第56页 Continue from page 56)

即 $\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \geqslant \frac{1}{\beta} \| \varphi_1(s) - \varphi_2(s) \| \exp(-\alpha(t-s)), (t \geqslant s)$.

这样当 $t \to +\infty$ 时,上式右端趋于 $+\infty$,这与 $\sup\limits_{t \in k} \{ \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \} < B$ 矛盾. 这个矛盾说明方程(1)的概周期解是唯一的.

参考文献

1 赵晓强. 非自治系统的周期解. 应用数学学报,1988,(1):30~39.

2 李黎明. 一类高维非自治系统的周期解. 应用数学学报,1989,(3):272~280.

3 何崇佑. 概周期微分方程. 北京:高等教育出版社,1992,126~145.

4 王全义. 概周期解的存在性、唯一性与稳定性. 数学学报,1997,40(1):80~89.

(责任编辑:邓大玉)