第 15 卷第 4 期
1999 年 11 月

广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

Vol. 15, No. 4
November 1999

①

99,15(4)

145-147

O157.5

获得小 Ramsey 数下界的一个方法*
A Method of Obtaining Lower Bounds for Some Ramsey Numbers

苏文龙
Su Wenlong
（广西计算中心　南宁　530022）
(Guangxi Computing Center, Nanning, 530022)

李　乔
Li Qiao
（上海交通大学　上海　200030）
(Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai, 200030)

罗海鹏
Luo Haipeng
（广西科学院　南宁　530031）
(Guangxi Academy of Sciences, Nanning, 530031)

摘要　q_1，q_2 是小参数，对于寻找 Ramsey 数 $R(q_1,q_2)$ 的下界，我们给出了一个新的方法。用这个方法，通过使用计算机，给出了包括 $R(5,15)\geqslant 242$ 在内的 13 个新的下界。

关键词　Ramsey 数　下界　模 p 的三次剩余

图，着色

中图法分类号　O 157.5；TP 312

Abstract　A new method of obtaining lower bounds for some Ramsey numbers $R(q_1,q_2)$ with small q_1, q_2 was presented. 13 new lower bounds, including $R(5,15)\geqslant 242$, were established by the method with the aid of computer.

Key words　Ramsey number, lower bound, cubic residues mod p

1　基本思想

计算经典 Ramsey 数 $R(q_1, q_2)$ 是公认的极端困难的问题。然而最近的 10 年来，许多人使用计算机算法在这一领域获得了较大的进展，得到了几个著名的准确值和若干个对于小参数 q_1、q_2 的 $R(q_1, q_2)$ 的下界。进一步的详情请参阅 Radziszowski 最近发表的动态综述[1]。

在这里我们提供了对于小的 q_1，q_2 获得 $R(q_1, q_2)$ 下界的一个方法。我们的方法是他人较早的工作[2]的扩展，这个基本思想如下：

设 $p=6m+1$ 是一个素数，设 G_p 是一个图，它的顶点集合 $Z_p=\{-3m,\cdots,-1,0,1,\cdots,3m\}$，在这个图中 2 个顶点 x，y 相邻当且仅当 $x-y$ 是模 p 的三次剩余。注意到因为 -1 是一

1999-05-03 收稿。
* 广西科学基金资助项目。

个模 p 的三次剩余，因此图 G 被明确地定义了. 事实上，设 S_1 是 Z_p 中模 p 的三次剩余的集合，则 $0 \notin S_1$，$1 \in S_1$ 并且 $-S_1 = S_1$. 因此，$G_p = G_p(S_1)$ 属于已知的循环图 Cayley 图中的一个特殊的类，S_1 被称作 G_p 的跳跃集[3]. G_p 的补图 $\bar{G}_p$ 也是一个循环图，它的跳跃集 $S_2 = Z_p^* \backslash S_1$，这里 $Z_p^* = Z_p \backslash \{0\}$，也就是说，$\overline{G_p(S_1)} = G_p(S_2)$. 设 $c_i = c(G_p(S_i))$ 是 $G_p(S_i)(i=1,2)$ 的团数，则根据定义我们有下界公式：

$$R(c_1 + 1, c_2 + 1) \geqslant p + 1. \tag{1}$$

参考文献[2] 给出了这个方法的一个很好的例子. 设 $p = 13$ 则我们有

$S_1 = \{-5, -1, 1, 5\}$,

$S_2 = \{-6, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 6\}$,

在这种情况下，可以验证 $c_1 = 2$ 和 $c_2 = 4$，因此根据(1) 得到 $R(3,5) \geqslant 14$. 然而，我们已知 $R(3,5) \leqslant 14$，因此获得的这个下界刚好是准确值.

不幸的是，在一般的情况下我们对于 $G_p(S_1)$ 的团数和特性知道得非常少，对 $G_p(S_2)$ 知道得更少，因为它更加复杂. 然而，我们对于不太大的素数 $p \equiv 1 \pmod 6$ 设计了一个有效的算法去计算 c_1 和 c_2. 为了减少计算量我们引进 $S_i(i=1,2)$ 的子集合 B_i 并且证明了(1) 的一个改进的公式如下.

定理 设 $B_1 = \{x \in S_1 : x - 1 \in S_2\}$，对任何给定的 $k = 1$ 或 2、$B_2 = \{x \in S_2 : x - g^k \in S_2\}$，并且设 $G_p[B_i]$ 是 $(G_p(S_i))$ 用 B_i 导出的子图，则 $c_i = b_i + 2$，这里 $c_i = c(G_p(S_i))$，$b_i = c(G_p[B_i])$ 并且如果 $B_i = \varnothing (i = 1,2)$ 则让 $b_i = 0$. 于是(1) 可以被改进为

$$R(b_1 + 3, b_2 + 3) \geqslant p + 1. \tag{2}$$

2 新的下界

为了用式(2) 去获得新的下界，对于给定的素数 $p = 6m + 1$，首先我们给一个原根 g，这样 Z_p 中模 p 的三次剩余和非三次剩余的集合可以表示为

$S_1 = \{g^{3j} : j = 0, 1, \cdots, 2m - 1\}$,

$S_2 = Z_p^* \backslash S_1 = gS_1 \cup g^2 S_1$,

接下来我们设计了一个算法对于某些素数 $p \equiv 1 \pmod 6$ 去计算 b_1、b_2. 若干个新的下界和相关的数据列在表 1. 在表 1 中，对于每一个素数 $p \equiv 1 \pmod 6$，g 是 p 的一个原根，b_i 是前面提到的图 $G[B_i]$ 的团数，新的下界 $R(b_1 + 3, b_2 + 3) \geqslant p + 1$，对应的已知的下界是在参考文献[1]中报告的，表 1 最后一列是用我们的算法在一台计算机（奔腾 Ⅱ 300）上获得的结果及所用的 CPU 时间. 我们认为所有的数据都是可检验的. 这个算法的进一步描述将另文发表.

3 注记

(1) S. P. Radziszowski 在参考文献[1]中指出，除了 $R(5,15) \geqslant 237$，在他的综述中列出的所有下界都是用构造循环图获得. 现在我们新的下界 $R(5, 15) \geqslant 242$ 和相关的循环图 $G_{241}(S_1)$ 把这个唯一的例外排除掉了.

(2) 我们从前给出的下界 $R(4,12) \geqslant 128$[4] 也是用现在的方法获得的.

表 1 新下界及相关数据

p	g	b_1	b_2	用公式(2)得的新下界	原来最好的下界	需要 CPU 的时间
241	7	2	12	$R(5,15)\geqslant 242$	237	00:00:12
229	6	3	9	$R(6,12)\geqslant 230$	224	00:00:06
283	3	3	11	$R(6,14)\geqslant 284$	258	00:01:05
373	2	3	12	$R(6,15)\geqslant 374$	338	00:02:39
433	5	3	13	$R(6,16)\geqslant 434$	blank	00:06:57
547	2	3	14	$R(6,17)\geqslant 548$	420	01:03:39
613	2	3	15	$R(6,18)\geqslant 614$	blank	05:59:42
709	2	3	16	$R(6,19)\geqslant 710$	blank	26:54:38
877	2	3	17	$R(6,20)\geqslant 878$	blank	168:01:51
757	2	4	16	$R(7,19)\geqslant 758$	618	24:16:48
673	5	5	14	$R(8,17)\geqslant 674$	602	03:03:42
739	3	5	15	$R(8,18)\geqslant 740$	642	10:09:25
859	2	5	16	$R(8,19)\geqslant 860$	684	39:43:38

(3) 在这里我们没有报告用这种方法获得的更多的结果，因为我们认为我们的结果早晚一定会被改进，虽然这可能是不容易的. 无论如何，我们希望我们的工作能够促进这一领域研究的进展.

参考文献

1 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. Electronic J Combinatorics, 1998, Revision #5: 1～30.

2 Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Can J Math, 1955, (7): 1～7.

3 Boesch F T, Tindell R. Circulants and their connectivity. J Graph Thoery, 1984, (8): 487～499.

4 Su Wenlong, Luo Haipeng, Li Qiao. New lower bounds for classical Ramsey numbers $R(4, 12)$, $R(5, 12)$. Chinese Sci Bull, 1998, 43 (1): 528.

（责任编辑：黎贞崇）