DOI: 10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1998.03.001

第 14卷第 3期　　广西科学院学报　　Vol. 14, No. 3
1998年 8月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　August 1998

经典三色 Ramsey数 $R(3,3,11)$ 的新下界*

New Lower Bound of Classical Three-color Ramsey Number $R(3,3,11)$

罗海鹏　　苏文龙

Luo Haipeng　　Su Wenlong

(广西科学院　南宁　530031)
(Guangxi Academy of Sciences, Nanning, 530031)

(广西计算中心　南宁　530022)
(Guangxi Computer Centre, Nanning, 530022)

摘要　构造了一个 107个顶点的素数阶循环图.通过计算机验证了这个图中既没有第 1色的 3点团,也没有第 2色的 3点团,也没有第 3色的 11点团.从而得到了一个经典三色 Ramsey数的新下界: $R(3,3,11)\geqslant 108$.

关键词　Ramsey数　下界　素数阶循环图

中图法分类号　O 157.5; TP 312

Abstract　A new prime order cyclic graph with 107 vertices was structured. By computer it was verified that the graph contains neither first color 3-point clique K_3, nor second color 3-point clique K_3, and nor third color 11-point clique K_{11}. So a new lower bound of classical Ramsey number was obtained $R(3,3,11)\geqslant 108$.

Key words　Ramsey number, lower bound, prime order cyclic graph

1　Ramsey定理

众所周知,在组合数学中有著名的 Ramsey定理[1].

Ramsey定理　对于任意给定的 $n\geqslant 2$个正整数 $q_1,q_2,\cdots,q_n\geqslant 2$,存在最小正整数 R,当 $s\geqslant R$ 时用 n种颜色把 s阶完全图 G的边任意染色,则一定存在各边都染第 i种颜色的 q_i阶完全子图(简称第 i色的 q_i点团).这里 i是 $1,2,\cdots,n$中的某一个.

Ramsey定理只解决了 Ramsey数的存在性问题,并未给出一系列的 Ramsey数的具体的值.给出 Ramsey数的准确值是图论的四大难题之一,是组合数学的第一大困难问题.

上述正整数 R称为 2阶 Ramsey数 $R(q_1,q_2,\cdots,q_n;2)$.我们只研究不平凡的 2阶 Ramsey数,约定 $q_1,q_2,\cdots,q_n\geqslant 3$,并简记上述 Ramsey数为 $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$.

1998-03-11收稿.

* 广西自然科学基金资助项目.

2 已知的 Ramsey数

确定 Ramsey数是组合数学和图论中著名的难题[2],只有 9个形如 $R(m,n)(m\geqslant 3, n\geqslant 3, n\geqslant m)$的 Ramsey数被确定[3]. 这 9个 Ramsey数如下: $R(3,3)=6, R(3,4)=9, R(3,5)=14, R(3,6)=18, R(3,7)=23, R(3,8)=28, R(3,9)=36, R(4,4)=18, R(4,5)=25$.

对于 Ramsey数 $R(5,5)$,目前还不能找到它的准确值,已知的情况是: $43\geqslant R(5,5)\geqslant 49$.

曾和爱因斯坦合作发表过 7篇论文的著名数学家 P. Erdös (他一生发表了 1000篇论文)经常用下面虚拟的小故事来说明寻找 Ramsey数的困难程度. 这个故事是这样的: 有一个邪恶的外星妖精来到地球上, 无理地向人类提出要求, 必须告诉 Ramsey数 $R(5,5)$ 等于多少, 否则它就毁灭人类. P. Erdös认为, 这时我们人类的最好办法是动员地球上所有的计算机科学家和所有的计算机放下手里的一切工作, 集中力量来解决这个问题, 争取得出 $R(5,5)$ 的值, 来回答妖精挑衅式的提问.但是如果这个妖精不是要 $R(5,5)$ 的值,而是要 $R(6,6)$的值 ,那就更困难得多了. P. Erdös认为, 这已经超出了我们人类能力的范围, 在这种情形下我们人类就别无他法, 只有动员地球上所有的军队和所有的武器, 在妖精毁灭我们之前先消灭它.

至于多染色的经典 Ramsey数 (multicolor classical Ramsey number) 的准确值, 自从 1955年 R. E. Greenwood和 A. M. Gleason[4]得到 $R(3,3,3)=17$后, 至今还没有任何新的进展.

3 三色 Ramsey数 $R(3,3,q)$的已知下界

关于 Ramsey数 $R(3,3,q)$的下界,已知的结果仅有两个: $R(3,3,4)\geqslant 30$[5]和 $R(3,3,5)\geqslant 45$[6].根据熟知的递推公式[7]

$R(q_0+q_1-1, q_2,\cdots,q_n)\geqslant R(q_0,q_2,\cdots,q_n)+R(q_1,q_2,\cdots,q_n)-1$和 $R(3,3,2)=6$[4],只能推导得平凡的下界 $R(3,3,6)\geqslant 50$和 $R(3,3,7)\geqslant 61$等等.

鉴于 Ramsey数的研究如此困难,我们在文献[8-13]中采用了新颖的方法,得到了一些经典 Ramsey数的新下界. 我们在本文中进一步改进了这些方法, 优化了程序设计, 并把它们用于研究经典多染色的 Ramsey数, 获得了一个新的下界.

4 经典三色 Ramsey数 $R(3,3,11)$的新下界

给定素数 107. 记 $Z_{107}=\{0,1,2,\cdots,106\}$ 为模 107的一个剩余系.选定参数集合

$S_1=\{1,3,5,11,17,24,26,30,32,36,38,40,42,44\}$;

$S_2=\{6,18,23,28,33,35,43,45,47,48,50,52\}$;

$S_3=\{2,4,7,8,9,10,12,13,14,15,16,19,20,21,22,25,27,29,31,34,37,39,41,46,49,51,53\}$.

考察 107阶完全图 K_{107}的 3-染色.设图 K_{107}的顶点集为 Z_{107},边集

$E(K_{107})=E_1\cup E_2\cup E_3$.

其中第 $i(i=1,2,3)$ 色边的集合

$E_i=\{(x,y)\,|\,|x-y|\in S_i$或 $p-|x-y|\in S_i\}$.

对于图 K_{107}的任意一个顶点 $a\in Z_{107}$,设

$$\theta_i(a)=\{x\,|\,|x-a|\in S_i \text{或} p-|x-a|\in S_i, x\in Z_{107}\} \quad (1)$$

$$\min\{|x-y|, p-|x-y|\}\notin S_1.$$

因此三个顶点 a,x,y的三条联边 (a,x)、(a,y)、(x,y)不都属于 E_1.这就证明了图 K_{107}中不存在各边都染第 1种颜色的 3阶完全子图(即第 1色的 3点团).

同理可证 K_{107}中不存在第 2色的 3点团.

在(1)式中令 $i=3$,利用计算机作辅助运算,可以验证:对于$\theta_3(a)$中的任意 10个元素 x_1, $x_2,\cdots,x_{10}$,至少有两个元素 x_i与 x_j ($1\leqslant i<j\leqslant 10$)满足

$$\min\{|x_i-y_j|, p-|x_i-y_j|\}\notin S_3.$$

因此在图 K_{107}中不存在第 3色的 11点团.

综上述,我们就证明了:在完全图 K_{107}的上述 3-染色中,既不存在第 1色或第 2色的 3点团,也不存在第 3色的 11点团. 根据 Ramsey定理,我们就有

定理 1　$R(3,3,11)\geqslant 108$.

这个结果优于根据已知成果递推出来的平凡的下界,填补了文献[3]中的 1个空白.

致谢

北京大学徐明曜教授、上海交通大学李乔教授和复旦大学杨劲根教授对我们的研究工作给予了很大的支持和帮助,借此机会深表感谢.

参考文献

1　Ramsey F P. On a problem of formal logic. Proc London Math Soc, and Ser, 1930, 30: 264~286.

2　李　乔. 组合数学基础. 北京: 高等教育出版社, 1993. 225~258.

3　Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, Revision, 1997, 1: 1~27.

4　Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Canadian Journal of Mathematics, 1955, (7): 1~7.

5　Kalbfleisch J G. Chromatic graphs and Ramsey's theorem. Ph. D. thesis, University of Waterloo, January, 1966.

6　Exoo G. Constructing Ramsey graphs with a computer. Congressus Numerantium, 1987, 59: 31~36.

7　宋恩民. Ramsey数的性质研究. 应用数学, 1994, 7 (2): 216~221.

8　苏文龙,罗海鹏,李　乔. 经典 Ramsey数 $R(4,12)$,$R(5,11)$和 $R(5,12)$的新下界. 科学通报, 1997, 42 (22): 2460.

9　苏文龙,罗海鹏,吴　康. 经典 Ramsey数 $R(5,12)$,$R(5,13)$,$R(5,14)$和 $R(5,15)$的新下界. 广西大学学报, 1997, 22 (4): 298~299.

10　罗海鹏,苏文龙,李　乔. 经典 Ramsey数 $R(6,12)$,$R(6,14)$和 $R(6,15)$的新下界. 科学通报, 1998, 43 (12): 1336~1337.

11　苏文龙,罗海鹏,吴　康. 若干 Ramsey数 $R_n(5)$的新下界. 广西科学, 1997, 4 (3): 183~185.

12　苏文龙,罗海鹏,张正铀. 若干经典 Ramsey数 $R(5,q)$的新下界. 计算机应用研究, 1997, 5: 10.

13　苏文龙,罗海鹏,吴　康. Ramsey数 $R(4,q)$的 3个下界. 广西科学院学报, 1997, 13 (4): 9~10.