DOI: 10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1998.02.007

第 14卷第 2期　　广西科学院学报　　Vol. 14, No. 2
1998年 5月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　May 1998

# 经典 Ramsey数 $R(8,18)$、$R(8,19)$和 $R(8,20)$的下界*

# Lower Bounds of Classsical Ramsey Numbers $R(8,18)$, $R(8,19)$ and $R(8,20)$

罗海鹏
Luo Haipeng
(广西科学院　南宁　530031)
(Guangxi Academy of Sciences, Nanning, 530031)

苏文龙
Su Wenlong
(广西梧州一中　梧州　543002)
(Wuzhou No. 1 Middle School of Guangxi, Wuzhou, 543002)

**摘要**　通过计算机构造了 3个新的循环图,从而获得 Ramsey数的 3个下界: $R(8,18)\geqslant 618$, $R(8,19)\geqslant 662$, $R(8,20)\geqslant 752$. 这些结果填补了 Ramsey数研究的 3个空白.

**关键词**　Ramsey数　下界　素数阶循环图

**中图法分类号**　O 157.5; TP 312

**Abstract**　Three new circulate graphs were constructed by computer, so lower bounds of three Ramsey numbers was obtained: $R(8,18)\geqslant 618$, $R(8,19)\geqslant 662$, $R(8,20)\geqslant 752$. Those results fill three blanks in the research of Ramsey number.

**Key words**　Ramsey number, Lower bound, prime order circulate graph

对于给定的整数 $m, n\geqslant 2$, 求最小的正整数 $R$,使得任意联边的不小于 $R$个顶点的图 $G$中一定含有 $m$点完全子图 $K_m$或者 $n$独立点集 $\bar{K}_n$,这个正整数 $R$就称为 Ramsey数 $R(m,n)$[1]. 确定 Ramsey数是组合数学和图论中著名的难题,至今在理论和方法上尚未见到取得突破的迹象,因此近年来各国学者运用各种方法借助计算机对一些具体的 Ramsey数给出上界和下界的估计.

## 1　已知 Ramsey数 $R(8,n)$的下界

关于 Ramsey数 $R(8,n)$,除了平凡的 $R(8,2)=8$,要确定它们的准确值是非常困难的. 1990年 B. D. McKay和张克民[2]采用穷举法,用 11台 Sun工作站运算了两万小时证明了 $R(8,3)=28$. 当 $n\geqslant 4$时目前仅知道 3个不平凡的下界 $R(8,4)\geqslant 53$[3]、$R(8,5)\geqslant 95$[4]和 $R(8,8)\geqslant 282$[5].除此之外,人们就只能根据上述结果利用熟知的递推公式[6]$R(m,n+t+1)$

1997-10-27收稿.
* 广西科学基金资助项目.

$\geqslant R(m,n+1)+R(m,t+1)-1$,计算出其他平凡的下界了.

我们在 Ramsey数研究中应用了数论和群论的一些新方法,利用素数阶循环图的平移和旋转等性质改进了产生参数的方法,提高了运算效率,得到一系列 Ramsey数的新下界[7~10].本文把这种方法用于 Ramsey数 $R(8,n)$的探索,得到一些新的下界.

## 2 Ramsey数 $R(8,18)$、$R(8,19)$和 $R(8,20)$的新下界

对于给定的素数 $p$,记 $Z_p=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$,选定参数集合 $S\subset\{1,2,\cdots,(p-1)/2\}$.设图 $G$的顶点集 $V_G=Z_p$,边集定义为:两个顶点 $x$和 $y$相邻当且仅当 $\min\{|x-y|,p-|x-y|\}\in S$.我们称图 $G$为关于参数集合 $S$的 $p$阶循环图并记为 $G_p(S)$.

据此我们构造了 3个素数阶循环图:

(1)给定素数 $p_1=617$与图 $G$边集的参数集合

$S_1=\{1,3,8,10,11,15,22,25,26,27,28,32,33,34,35,36,37,38,39,46,50,51,58,62,65,75,77,79,81,82,85,86,89,90,91,94,96,98,99,106,108,110,112,114,115,119,120,121,126,128,130,132,133,134,138,142,146,148,152,155,157,161,162,163,166,169,170,172,173,174,175,176,177,179,184,186,191,193,194,195,197,202,203,209,214,215,217,218,221,225,226,232,233,234,236,237,239,241,243,244,246,250,255,256,257,258,262,270,274,275,279,281,283,286,287,288,289,297,298,299,300,301,302,304,305,306\}$.

(2)给定素数 $p_2=661$与图 $G$边集的参数集合

$S_2=\{1,2,7,8,11,12,14,16,19,21,23,24,28,30,32,33,34,38,39,46,49,51,55,56,57,64,66,67,69,73,77,79,84,88,89,92,96,101,107,109,110,113,114,125,126,131,132,139,143,144,147,149,150,151,153,161,162,167,168,170,171,178,183,184,186,190,192,193,195,197,198,205,213,215,218,219,221,223,225,228,245,247,249,250,252,253,254,255,257,259,262,263,265,266,267,268,269,276,277,280,281,282,287,288,294,296,297,301,304,305,306,307,314,315,317,318,320,321,325,328\}$.

(3)给定素数 $p_3=751$与图 $G$边集的参数集合

$S_3=\{1,3,4,7,11,17,22,23,27,30,32,41,48,51,52,54,55,57,59,60,63,65,66,70,72,73,76,78,79,80,81,82,83,85,86,87,90,93,95,96,100,104,106,107,109,112,119,121,122,126,129,133,140,142,147,148,149,153,154,168,170,174,176,177,179,182,184,186,187,189,191,194,197,199,201,203,205,210,214,215,216,217,219,223,224,228,232,234,239,240,241,243,246,247,248,249,251,256,258,260,261,270,276,278,279,282,285,288,290,291,292,294,299,300,301,304,307,309,310,312,314,317,320,325,326,337,338,343,345,346,347,349,357,359,363\}$.

我们在计算机上验证了:如前定义的素数阶循环图 $G_{617}(S_1)$中既不含 8点团 $K_8$,也不含 18独立点集 $\bar{K}_{18}$;循环图 $G_{661}(S_2)$中既不含 8点团 $K_8$,也不含 19独立点集 $\bar{K}_{19}$,循环图 $G_{751}(S_3)$中既不含 8点团 $K_8$,也不含 20独立点集 $\bar{K}_{20}$.由于这些结论并据 Ramsey定理,我们就证明了

**定理 1** $R(8,18)\geqslant 618$, $R(8,19)\geqslant 662$, $R(8,20)\geqslant 752$.

上述结果优于根据递推公式算出的相应平凡的结果,它们填补了文献 [11]中 Ramsey数

## 参考文献


1 李乔. 组合数学基础. 北京: 高等教育出版社, 1993. 11.

2 McKay B D, Zhang Ke Min. The value of the Ramsey number $R(3, 8)$. Journal of Graph Theory, 1992, (16): 99- 105.

3 Exoo G. Applying optimization algorithm to Ramsey problems. In: Alavi Y. Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications, SIAM Philadelphia, 1989, 175- 179.

4 Piwakowski K. Applying tabu search to determine new Ramsey graphs. The Electronic Journal of Combinatorics, http: //ejc. math. gatech. edu: 8080/Journal/ejcwce. html, # R6, 3 (1996) 4.

5 Burling J P, Reyner S W. Some lower bounds of the Ramsey numbers $n(k,k)$. Journal of Combinatorial Theory, 1972, Series B, 13, 168- 169.

6 黄益如. Ramsey极图的性质. 上海大学学报, 1995, 1 (3): 237- 240.

7 Su Wenlong. The estimation of lower bounds about some Ramsey numbers $R_n(3)$ and $R_n(4)$. 广西科学, 1996, 3 (3): 4- 7.

8 苏文龙, 罗海鹏, 李 乔. 经典 Ramsey数 $R(4,12)$, $R(5,11)$和 $R(5,12)$的新下界. 科学通报, 1997, 42 (22): 2460.

9 苏文龙, 罗海鹏, 吴 康. 经典 Ramsey数 $R(5,12)$、$R(5,13)$、$R(5,14)$和 $R(5,15)$的新下界. 广西大学学报, 1997, 22 (4): 298- 299.

10 苏文龙, 罗海鹏, 吴 康. 4个 Ramsey数 $R(5,12)$, $R(5,13)$, $R(5,14)$和 $R(5,15)$的新下界. 华中师范大学学报, 1997专辑: 70- 71.

11 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics 1994, 1(DS1): 1- 27, Revision # 4: July 16, 1997.


# 21世纪初科学发展趋势: 概率论的发展趋势与若干重大问题

一、从分析国际概率论的现状及发展趋势出发, 21世纪初概率的发展主要有:

(1) 随机分析将是 21世纪初概率论的一个主流方向

21世纪初随机分析的主要论题有: 狄氏型与无穷维随机分析; 流形上的随机分析, 随机微分几何; 马里亚万分析, 拟必然分析; 大偏差理论与统计力学; 随机偏微分方程, 倒向随机微分方程, 非适应随机微分方程, 无穷维随机微分方程; 随机分形, 分形上的随机过程; 白噪声分析, 量子随机分析; 随机量子化; 随机动力系统。

(2) 粒子系统与随机场也将是 21世纪初概率论的一个主流方向

相互作用粒子系统是一类特殊的马氏过程。进一步发展是研究非平衡系统的分岔现象。该研究方向目前还处于探索新方法 (如耦合方法) 和致力于一些具体的模型的研究阶段。

与粒子系统有密切联系的一个概率论论题是超过程。该论题在近十多年内取得了很大进展。

(3) "数理金融学" 和 "随机排队网络" 将是 21世纪初应用概率论的两个研究热点

一门以随机分析为主要研究手段的跨学科数学分支—— "数理金融学" (mathematical finance) 在金融市场、资本投资决策问题及保险业的风险理论中已获得成功的实际应用, 目前正处于一个蓬勃发展的时期。在下一世纪初, 该分支将成为应用概率的一个研究热点。应用概率的另一个研究热点将是 "随机排队网络" (stochastic queueing networks)。下一世纪初将在全球范围内兴起的 "信息高速公路" 工程将进一步推动这一分支的发展。

二、若干重大问题

费因曼 (Feynman) 积分, 交互作用相对量子场的构造, 四维高分子 (polymer) 测度的构造, 渗流及伊辛 (Ising) 模型的临界值问题, 环空间上对数索伯列夫 (Sobolev) 不等式及霍奇-德·拉姆 (Ho Dge-de Rham) 定理。

(摘自 21世纪初科学发展趋势课题组编写的

《21世纪初科学发展趋势》. 科学出版社, 1996. 125- 127)