

经典 Ramsey 数 $R(7, 21)$ 的下界*Lower Bound of Classical Ramsey Number $R(7, 21)$

罗海鹏

Luo Hai peng

(广西科学院 南宁 530031)
(Guangxi Academy of
Sciences, Nanning, 530031)

苏文龙

Su Wenlong

(广西梧州一中 梧州 543002)
(Wuzhou No. 1 Middle School
of Guangxi, Wuzhou, 543002)

摘要 通过计算机构造了一个新的 641 阶循环图, 它既不含任何的 7 点团, 也不含任何的 21 独立点集, 从而获得了 Ramsey 数 $R(7, 21)$ 的一个下界: $R(7, 21) \geq 642$. 这个结果填补了 Ramsey 数研究的一个空白.

关键词 Ramsey 数 下界 素数阶循环图

Abstract A new 641 order cyclic graph was constructed by computer, it contains neither 7-point clique nor subset of 21 isolated points, so lower bound of Ramsey number $R(7, 21)$ was obtained $R(7, 21) \geq 642$. The result fills a blank in the research of Ramsey number.

Key words Ramsey number, Lower bound, prime order cyclic graph

中图法分类号 O 157. 5

1 Ramsey 数定义

求一个最小的整数 $R(m, n)$, 使得任何有 $R(m, n)$ 个顶点的图一定含有 m 点完全图 K_m 或若 n 独立点集 K_n , 这个最小的整数 $R(m, n)$ 被称为 Ramsey 数^[1]. 确定 Ramsey 数是组合数学和图论中著名的难题, 近年来各国学者主要用各种方法借助计算机对一些具体的 Ramsey 数给出上界和下界的估计.

2 已知 Ramsey 数 $R(7, n)$ 的下界

Ramsey 数 $R(7, n)$ 的下界, 目前已知的情况为: $R(7, 3) = 23^{[2]}$, $R(7, 4) \geq 49^{[3]}$, $R(7, 5) \geq 80^{[4]}$, $R(7, 7) \geq 205^{[5, 6]}$, 其他的都还是未知的.

我们在 Ramsey 数研究中应用了数论和群论的一些新方法, 利用素数阶循环图的平移和旋转等性质改进了产生参数的方法, 提高了运算效率, 得到一系列 Ramsey 数的新下界^[7-9].

本文仍采用上述方法, 获得了 Ramsey 数 $R(7, 21)$ 新的下界.

3 Ramsey 数 $R(7, 21)$ 的新下界

对于给定的素数 p , 记 $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, 选定参数集合 $S \subset \{1, 2, \dots, (p-1)/2\}$. 设图 G 的顶点集 $V_G = Z_p$, 边集定义为: 两个顶点 x 和 y 相邻当且仅当 $\min\{|x-y|, p-|x-y|\} \in S$. 我们称图 G 为关于参数集合 S 的 p 阶循环图并记为 $G_p(S)$.

据此我们构造了一个素数阶循环图:

给定素数 $p = 641$ 与图 G 边集的参数集合

$S = \{1, 3, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 20, 22, 28, 39, 40, 44, 45, 48, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 61, 63, 69, 70, 74, 77, 79, 87, 89, 98, 100, 102, 103, 104, 107, 109, 110, 117, 120, 121, 123, 124, 125, 127, 128, 132, 134, 135, 137, 140, 142, 144, 148, 151, 152, 154, 159, 162, 163, 168, 169, 171, 172, 175, 178, 179, 181, 183, 184, 185, 188, 189, 193, 196, 197, 207, 208, 211, 221, 223, 232, 234, 236, 237, 239, 245, 250, 255, 256, 259, 260, 261, 269, 271, 272, 274, 275, 277, 278, 281, 284, 286, 288, 289, 291, 292, 298, 300, 306, 309, 310, 311, 313, 314, 317, 318, 320\}$.

我们在计算机上验证了: 如前定义的素数阶循环图 $G_{641}(S)$ 中既不含 7 点团 K_7 , 也不含 21 独立点集 K_{21} . 由于这个结论并据 Ramsey 定理, 我们就证明了

定理 1 $R(7, 21) \geq 642$

上述结果填补了文献 [10] 中 Ramsey 数研究的一个空白.

参考文献

- 1 哈拉里 F. 图论. 上海: 上海科学技术出版社, 1990. 1.
- 2 Kalbfleisch J G. Chromatic graphs and Ramsey's theorem. Ph D thesis, University of Waterloo, January 1966.
- 3 Exoo G. Applying optimization algorithm to Ramsey problems. In: Alavi Y. Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications, SIAM Philadelphia, 1989. 175~ 179.
- 4 Calkin N J, Erdos P, Tovey C A. New Ramsey bounds from cyclic graphs of prime order. to appear, 1997.
- 5 Mathon R. Lower bounds for Ramsey numbers and association schemes. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1987, 42: 122~ 127.
- 6 Shearer J B. Lower bounds for small diagonal Ramsey numbers. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1986, 42: 302~ 304.
- 7 Su Wenlong. The estimation of lower bounds about some Ramsey numbers $R_n(3)$ and $R_n(4)$. 广西科学, 1996, 3 (3): 4~ 7.
- 8 苏文龙, 罗海鹏, 李 乔. 经典 Ramsey 数 $R(4, 12)$, $R(5, 11)$ 和 $R(5, 12)$ 的新下界. 科学通报, 1997, 42 (22): 2460.
- 9 苏文龙, 罗海鹏, 吴 康. 经典 Ramsey 数 $R(5, 12)$, $R(5, 13)$, $R(5, 14)$ 和 $R(5, 15)$ 的新下界. 广西大学学报, 1997, 22 (4): 298~ 299.
- 10 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics 1 (1994), DSI: 1~ 27, Revision# 4 July 16, 1997.