

“+”、“-”号构成的阵列 The Matrixes Consisted of “+” and “-”

罗海鹏

黎贞崇

苏芳来

Lou Haipeng

Li Zhencong

Su Fanglai

(广西科学院 南宁 530031)

(Guangxi Academy of Sciences,
Nanning, 530031)

(广西电化教育馆 南宁 530023)

(Audio-Visual Educational
Centre of Guangxi, Nanning, 530023)

摘要 寻找“+”、“-”号个数相等的阵列问题是尚未完全解决的问题。给出它的计算机算法，并具体地算出了第一行有 $N_1(3 \leq N_1 \leq 36)$ 个“+”、“-”号的解的例子，算出了第一行有 $N_2(3 \leq N_2 \leq 24)$ 个“+”、“-”号的解的个数。

关键词 “+”、“-”号阵列 计算机算法

Abstract Finding the matrixes which consist of same individuals of “+” and “-” is also a problem that has not been solved completely. An algorithms for it by computer was pointed out, and both an sample with $N_1(3 \leq N_1 \leq 36)$ individuals of “+” and “-” in row 1 and the $N_2(3 \leq N_2 \leq 24)$ individuals of “+” and “-” in row 1 were computed.

Key words “+”、“-” matrix, algorithms by computer

中图法分类号 O 241.6; TP 301.6

右图是由 14 个“+”号和 14 个“-”号组成的阵列。它形成的规则是这样的：第一行的 7 个“+”、“-”号是任意的，以下各行每个符号都要看它左上方、右上方的符号，如果同号则它为“+”号，如果异号则它为“-”号。

显而易见，如果第一行有 N 个“+”、“-”号，则这个阵列共有 $N(N + 1)/2$ 个“+”、“-”号，如果我们要研究阵列中“+”号个数与“-”号个数相等的情况，一定要有 $N = 3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots$ ，即 $N = 4L - 1$ 或 $4L(L = 1, 2, 3, \dots)$ 。

找出符合上述规则的“+”、“-”号阵列的通解是一个仍未解决的问题^[1]。

++-+-++
+-+-+-+
-+++-
-++-
-+-
-
+

1 算法描述与程序

我们通过计算机来研究这个问题。

1.1 算法描述

- 1) N 个元素的一个字符数组每个单元都装入“+”；
- 2) 按照二进制的改变数值和进位方式，从高位到低位改变“+”、“-”号，每一次改变，都形成一个新的阵列的第一行；
- 3) 产生阵列的其他行；
- 4) 统计“+”、“-”号个数，如相等则输出这个阵列，结束；如不等，则分两种情形：a) 第一行已全部是“-”号，则输出“THE MATRIX NOT EXIST.”结束；b) 第一行不是全部“-”号，则转 2)。

1.2 C 语言程序清单

```
main()
{
    int m,n;
    long k,i,x,y,s;
    char AY[20],BY[20];

    k=0;
    s=524288L;
    for(m=1;m<19;++)
    {
        AY[m]='+';
        for(i=1;i<=s;++)
        {
            for(m=1;AY[m]=='-&&m<=19;++)
            {
                AY[m]='-';
                AY[m]='-';
                x=0;y=0;

                for(m=1;m<=19;++)
                {
                    BY[m]=AY[m];
                    for(m=1;m<=19;++)
                    {
                        for(n=1;n<=20-m;++)
                        {
                            if(BY[n]=='+')
                                ++x;
                            else
                                ++y;
                            if(BY[n]==BY[n+1])
                                BY[n]='-';
                            else
                                BY[n]='-';
                        }
                    }
                }
                if(x==y)
                {

```

```

++k;
for(m=1,m<=19,++m)
    printf("%c",AY[m]);
    printf("\n");
}
printf("%ld\n",k);
}

```

注:S=524288L,L 为定义长整数

2 “+”、“-”号相等的阵列的例子

通过计算机计算,我们找出了很多“+”、“-”号相等的阵列,下面对 $N=4L-1$ 或 $4L$ ($L=1, 2, \dots, 8$) 各举出 1 例子。

2.1 $N=3$ 的例子

-++

-+

-

2.2 $N=4$ 的例子

+--++

--+

+-

-

2.3 $N=7$ 的例子

-+-+-++

-+---++

--++-

+-+-+

-++

-+

-

2.4 $N=8$ 的例子

- - + - + + +

+ - - - + + +

- + + - + +

- + - - +

- - + -

+ - -

- +

-

以下仅列出阵列的第一行。

2.5 $N=11$ 的例子

- - + - + + - + + +

2.6 $N=12$ 的例子

- + + - + + - + + . . . + +

2.7 $N=15$ 的例子

- - + - - + - - + + + + + +

2.8 $N=16$ 的例子

- - + - - + - - + - - + + + + + +

2.9 $N=19$ 的例子

- - + + - - + - - + - - + + + + + + +

2.10 $N=20$ 的例子

- - + + - - + - - + - - + - - + + + + + +

2.11 $N=23$ 的例子

- + - + + - - + - - + - - + + + + + + + +

2.12 $N=24$ 的例子

+ - + + - + + - + + - + + + + + + + + + +

2.13 $N=27$ 的例子

+ + - - + - - + - - + - - + + + + + + + + + +

2.14 $N=28$ 的例子

+-+-+--+--+-+---++-----+

2.15 $N=31$ 的例子

+-+-+--+--+-+---++-----+

2.16 $N=32$ 的例子

+-+-+--+--+-+---+-+---+++++

2.17 $N=35$ 的例子

+-+-+--+--+-+---+-+---+-----+

2.18 $N=36$ 的例子

+-+-+--+--+-+---+-+---+-----+

3 分析**3.1 “+”、“-”号相等阵列的个数与比率(见表1)**

从表1的最后一列看,随着 N 的增大,“+”、“-”号相等的阵列数目的增多是非常快的,可以猜测,当 $N=4L-1$ 或 $4L$ (其中 $L=1,2,3,\dots$)时,“+”、“-”号相等的阵列总是存在的。找出一个用 N 表示的“+”、“-”号相等阵列数目的表达式是一个需要研究的问题。

3.2 翻转性

看一个简单的例子。当 $N=3$ 时,若第一行的符号是“+十一”,构成了“+”、“-”号相等的阵列,则它的翻转形式“一十+”也构成“+”、“-”号相等的上面阵列的翻转阵列。反之,若第一行的符号是“一一+”,不能构成“+”、“-”号相等的阵列,则它的翻转形式“+一-”也不能构成“+”、“-”号相等的阵列。当 $N=4,7,8,11,\dots$ 时,也易见翻转性是成立的。

3.3 对偶性不成立

还是看上面的例子,第一行“+十一”构成了“+”、“-”号相等的阵列,而它的对偶“一一+”则不能构成“+”、“-”号相等的阵列。

表1 “+”、“-”号相等阵列的个数与比率

| N | M | K | K/M | K/N |
|-----|----------|--------|-------|---------|
| 3 | 8 | 4 | 0.5 | 1.33 |
| 4 | 16 | 6 | 0.375 | 1.5 |
| 7 | 128 | 12 | 0.094 | 1.71 |
| 8 | 256 | 40 | 0.156 | 5 |
| 11 | 2048 | 171 | 0.083 | 15.5 |
| 12 | 4096 | 410 | 0.100 | 34.2 |
| 15 | 32768 | 1896 | 0.058 | 126.4 |
| 16 | 65536 | 5160 | 0.079 | 322.5 |
| 19 | 524288 | 32757 | 0.062 | 1742 |
| 20 | 1048576 | 59984 | 0.057 | 2999 |
| 23 | 8388608 | 431095 | 0.051 | 18743 |
| 24 | 16777216 | 822229 | 0.049 | 34259.5 |

N : 第一行符号个数; M : 第一行 N 个符号的不同阵列的总数;

K : 正、负号相等阵列数

1 r. 施琴高兹(波兰),数学100题.北京:科学普及出版社,1982

参考文献