

# Ramsey 数 $R(4, q)$ 的 3 个下界\*

## Lower Bounds of Three Ramsey Numbers $R(4, q)$

苏文龙  
Su Wenlong

罗海鹏  
Luo Haipeng

(广西梧州一中 梧州 543002)  
(Wuzhou No. 1 Middle  
School of Guangxi, Wuzhou, 543002)

(广西科学院 南宁 530031)  
(Guangxi Academy of Sciences,  
Nanning, 530031)

吴 康  
Wu Kang  
(华南师范大学 广州 510631)  
(South China Normal University, Guangzhou, 510631)

**摘要** 构造了 3 个新的素数阶循环图, 从而得到了 3 个 Ramsey 数的下界:  $R(4, 20) \geq 200$ ,  $R(4, 21) \geq 224$ ,  $R(4, 22) \geq 252$ .

**关键词** Ramsey 数 下界 素数阶循环图

**Abstract** Three new prime order cyclic graph were structured, so three lower bounds of Ramsey numbers were obtained:  $R(4, 20) \geq 200$ ,  $R(4, 21) \geq 224$ ,  $R(4, 22) \geq 252$ .

**Key words** Ramsey number, Lower bound, prime order cyclic graph

中图法分类号 O 157.5

### 1 已知的 Ramsey 数 $R(4, q)$ 的下界

根据 Ramsey 数研究权威 S. P. Radziszowski 综述<sup>[1]</sup>的 1996 年 3 月 25 日的更新版本,  $R(4, q)$  目前已知最好的下界见表 1:

表 1 Ramsey 数  $R(4, q)$  已知最好的下界

$q$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
最好下界	18	25	35	49	53	69	80	96	106	118	129	134

另外, F. Bannani 1988 年在他的博士论文“Bounds on Classical Ramsey Numbers”中给出  $R(4, 16) \geq 120$ ,  $R(4, 17) \geq 128$ ,  $R(4, 18) \geq 135$ , 但这 3 个结果已经落后于表 1 中的结果.

### 2 $R(4, q)$ 下界的新的结果

当被寻找的 Ramsey 数的下界较大时, 在计算机上的运算量将会大得惊人. 因此, 我们另

1997-07-23 收稿.

\* 广西科学基金资助项目.

辟蹊径,将数论、近世代数、组合数学中的有关方法结合起来,给出寻找 Ramsey 数下界的新方法<sup>[2]</sup>.

我们在已发表的文献 [2~8] 中给出了 Ramsey 数下界的一系列新的结果. 在待发表的文章中,我们给出了 Ramsey 数  $R(4, q)$  ( $q = 12, 13, \dots, 17$ ) 的新下界. 其中  $R(4, 12) \geq 128$  被文献 [1] 的作者称赞为是目前最强的结果.

### 3 $R(4, 20)$ 、 $R(4, 21)$ 、 $R(4, 22)$ 的下界

对于给定的素数  $p$ , 记  $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ , 选定参数集合  $S \subset \{1, 2, \dots, (p-1)/2\}$ . 设图  $G$  的顶点集  $V_G = Z_p$ , 两个顶点  $x$  和  $y$  相邻当且仅当  $\min\{|x-y|, p-|x-y|\} \in S$ . 我们称图  $G$  为关于参数集合  $S$  的  $p$  阶循环图并记为  $G_p(S)$ .

据此,我们构造了3个素数阶循环图:

1) 给定素数  $p_1 = 199$  与参数集合

$S_1 = \{1, 3, 9, 10, 16, 18, 20, 22, 32, 34, 41, 44, 49, 56, 64, 65, 68, 69, 75, 77, 79, 80, 82, 87, 92, 93, 95\}$ .

2) 给定素数  $p_2 = 223$  与参数集合

$S_2 = \{1, 3, 5, 9, 20, 21, 23, 27, 28, 35, 37, 39, 40, 47, 49, 52, 62, 73, 81, 86, 92, 95, 96, 103, 105, 106, 111\}$ .

3) 给定素数  $p_3 = 251$  与参数集合

$S_3 = \{1, 9, 13, 20, 32, 33, 36, 37, 41, 43, 52, 57, 67, 68, 71, 83, 85, 86, 90, 92, 93, 97, 102, 103, 105, 107, 113, 115, 119, 121\}$ .

我们在计算机上验证了: 如前定义的素数阶循环图  $G_{199}(S_1)$  中既不含4点团  $K_4$ , 也不含20独立点集  $K_{20}$ ; 素数阶循环图  $G_{223}(S_2)$  中既不含4点团  $K_4$ , 也不含21独立点集  $K_{21}$ ; 素数阶循环图  $G_{251}(S_3)$  中既不含4点团  $K_4$ , 也不含22独立点集  $K_{22}$ . 由于这些结论并据 Ramsey 定理,我们就证明了

**定理 1**  $R(4, 20) \geq 200$ ,  $R(4, 21) \geq 224$ ,  $R(4, 22) \geq 252$ .

上述3个结果填补了文献 [1] 中的有关 Ramsey 数下界的空白.

#### 参考文献

- 1 Radziszowski S P. Small Ramsey Numbers. The Electronic Journal of Combinatorics 1994, 1 (1): 1~29.
- 2 Su Wenlong. The Estimation of Lower Bounds about Some Ramsey Numbers  $R_n(3)$  and  $R_n(4)$ . 广西科学, 1996, 3 (3): 4~7.
- 3 张正铀, 苏文龙, 罗海鹏, 吴康. Ramsey 数  $R(3, 3, 3, 3, 3; 2)$  的下界. 计算机应用研究, 1997, 3: 30~31.
- 4 罗海鹏, 苏文龙, 张正铀, 吴康. 一个 Ramsey 数的新的下界. 广西大学学报, 1997, 2: 95~97.
- 5 罗海鹏, 苏文龙, 张正铀, 黄苏宁. Ramsey 数  $R_7(4)$  的新下界. 桂林电子工业学院学报, 1997, 2: 49~52.
- 6 张正铀, 苏文龙, 罗海鹏. Ramsey 数  $R_9(4)$  的新下界. 广西民族学院学报, 1997, 1: 1~4.
- 7 Su Wenlong, Wu kang, Luo Haipeng. The Normal Subgroup of Cyclic Group and the Estimation of Lower Bounds about Ramsey Numbers. 97' Summer School and International Conference on Combinatorics, 1997. 5.
- 8 张正铀, 苏文龙, 罗海鹏. 经典 Ramsey 数  $R(5, 11)$  的下界. 广西科学, 1997, 4 (2): 84, 92.