DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1994.02.004

第10卷 第2期　　广西科学院学报　　Vol. 10, No. 2
1994年11月　　Journal of the Guangxi Academy of Sciences　　Nov, 1994

一个二阶非线性微分方程概周期解的存在性

冯春华　　庄兴义

(广西师范大学　桂林　541004)　(梧州高等师范专科学校　贺县　542800)

摘要　应用 Leray-Schauder 不动点定理，结合运用构造 Ляпунов 函数，研究了一类二阶非线性微分方程概周期解的存在性，得到了保证方程存在概周期解的一组充分条件.

关键词　二阶非线性方程　Leray-Schauder 不动点定理　Ляпунов 函数　概周期解

对二阶非线性微分方程解的各种性态的研究，是十分有意义的课题，许多理论工作者对此进行了深刻的研究[1,2,3,4]. 特别是文献〔1〕应用构造闭曲线围成的有界域，限制其解在有界域内的方法，研究了下述方程（1）的有界解、周期解及振荡解. 如所知道，对一个概周期系统，即使其解一致最终有界，也不能保证概周期解的存在性. 本文运用与〔1〕不同的方法，即 Leray-Schauder 不动点定理，结合运用构造 Ляпунов 函数，讨论了方程（1）概周期解的存在性，得到了保证方程（1）存在概周期解的一组充分条件.

考虑微分方程

$$\ddot{x} + f(x)\varphi(\dot{x}) + g(x)h(\dot{x}) = e(t,x,\dot{x}) \tag{1}$$

假定方程(1)中出现的函数均连续且满足解的存在唯一性条件，$e(t,x,\dot{x})$ 是关于 t 对 x、$\dot{x}$ 的一致概周期函数(一致概周期函数采用〔5〕中定义).

记　$F(x) = \int_0^x f(u)du$,　$G(x) = \int_0^x g(u)du$.

方程(1)的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)\varphi(y) - g(x)h(y) + e(t,x,y) \end{cases} \tag{2}$$

假设下述条件成立：

(i) 存在常数 $K > 0$，使当 $|x| > K$ 时 $f(x) > 0$，$xg(x) > 0$；

(ii) 对任意的 y 有 $h(y) > 0$，$y\varphi(y) > 0 (y \neq 0)$，当 $|y|$ 充分大时有 $h(y) < |\varphi(y)|$ 且 $h(y) \leqslant |y|$；

(iii) 存在常数 $K_0 > 0$，$M > 0$ 使

$$|y|/h(y) \leqslant K_0\left(\int_0^y \frac{u}{h(u)}du + M\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$y/\varphi(y) \leqslant K_0\left(\int_0^y \frac{u}{\varphi(u)}du + M\right)^{\frac{1}{2}};$$

1993-04-26 收稿.

(iv) $|e(t,x,y)| \leqslant E(t) \leqslant e_0$, $\int_0^{+\infty} E(t)dt = E_0 < +\infty$;

(v) $\int_0^{\pm\infty} (f(x) + |g(x)|)dx = \pm\infty$,

在上述假设条件下，我们有

定理 假设条件(i)—(v) 成立，则系统(2) 从而方程(1) 至少存在一个概周期解.

证明 记 $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

$$M(X(t),t) = \begin{pmatrix} y \\ -f(x)\varphi(y) - g(x)h(y) + e(t,x,y) \end{pmatrix}$$

则系统(2) 可简记为

$$X(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} M(X(\tau),\tau)d\tau. \tag{3}$$

设 S 表示所有二维向量概周期连续函数构成的 Banach 空间，其范数定义为

$$\|X\| = \sup_t(|x(t)| + |y(t)|)$$

用算子 T 表示积分(3)，即

$$TX(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} M(X(\tau),\tau)d\tau \tag{4}$$

由假设函数 $f(x)$、$g(x)$、$\varphi(y)$、$h(y)$、$e(t,x,y)$ 均连续，由文献[8] 不难证明 T 是 $S \to S$ 的连续算子，利用泛函分析的理论，与文献[9] 引理相同的方法，若 $\{X_n\}(n = 1,2,\cdots)$ 是 S 中的无穷序列，且 $\|X\| \leqslant m < +\infty(n = 1,2\cdots)$，则 $\{TX_n\}(n = 1,2,\cdots)$ 也是一致有界的，

由于 $\frac{d}{dt}TX_n = M(X_n(t),t)$,

及序列 $\{X_n\}(n = 1,2,\cdots)$ 的一致有界性必然蕴涵序列 $\{TX_n\}(n = 1,2,\cdots)$ 的等度连续性，故由 Ascoli 定理知 T 为紧算子，从而 T 是全连续算子.

为了应用 Leray-Schauder 不动点定理，我们要证明算子方程

$$X = \lambda TX \qquad \lambda \in (0,1) \tag{5}$$

的所有解有界. 记 $\mu = \lambda^2$，则 $\lambda \in (0,1)$ 必有 $\mu \in (0,1)$，因此，只需要证明系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu f(x)\varphi(y) - \mu g(x)h(y) + \mu e(t,x,y) \end{cases} \tag{6}$$

的所有解有界. 为此假设 $(x(t),y(t)) = (x,y)$ 是系统(6) 的任意一个解，分两种情形考虑：

情形 Ⅰ. 当 $x(t) = x > K$ 时，考虑函数

$$V = V(t,x,y) = \int_0^y \frac{u}{h(u)}du + \int_0^y \frac{u}{\varphi(u)}du + 2M + \mu(G(x) + F(x)) + l_1 \quad (0 < \mu < 1) \tag{7}$$

其中 $l_1 > 0$ 是保证 $\mu(G(x) + F(X)) + l_1 > 1$ 的某个常数. 由条件(ii) 及(iii)，只要 $M > 0$ 取得适当大总可以保证 $V > 1$，由条件(V) 知当 $x \to +\infty$ 时 $V \to +\infty$.

计算 V 沿系统(6) 的全导数得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(6)} = & \frac{y}{h(y)}[-\mu f(x)\varphi(y) - \mu g(x)h(y) + \mu e(t,x,y)] + \frac{y}{\varphi(y)}[-\mu f(x)\varphi(y) \\ & - \mu g(x)h(y) + \mu e(t,x,y)] + \mu g(x)y + \mu f(x)y \\ = & -\frac{\mu f(x)\varphi(y)y}{h(y)} - \frac{\mu g(x)h(y)y}{\varphi(y)} + \frac{\mu e(t,x,y)y}{h(y)} + \frac{\mu e(t,x,y)y}{\varphi(y)} \end{aligned} \tag{8}$$

因为当 $x > K$ 时 $f(x) > 0, g(x) > 0$，对任意的 y 有 $h(y) > 0$，y 与 $\varphi(y)$ 同号，故知(8)式右端第一、二两项均 $\leqslant 0$，从而(8)式成为

$$\dot{V}_{(6)} \leqslant \frac{\mu e(t,x,y)y}{h(y)} + \frac{\mu e(t,x,y)y}{\varphi(y)} \leqslant \frac{|e(t,x,y)||y|}{h(y)} + \frac{|e(t,x,y)|y}{\varphi(y)}$$

$$\leqslant E(t)\{K_0(\int_0^y \frac{u}{h(u)}du + M)^{\frac{1}{2}} + K_0(\int_0^y \frac{u}{\varphi(u)}du + M)^{\frac{1}{2}}\} \leqslant 2K_0E(t)\sqrt{V} \tag{9}$$

即 $$\dot{V}_{(6)} - 2K_0E(t)\sqrt{V} \leqslant 0 \tag{10}$$

再定义 $$W = W(t,x,y) = exp(-K_0\int_0^t E(\tau)d\tau)\sqrt{V} \tag{11}$$

则 $$\dot{W} = exp(-K_0\int_0^t E(\tau)d\tau)\left\{-K_0E(\tau)\sqrt{V} + \frac{1}{2}V^{-\frac{1}{2}}\dot{V}_{(6)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}exp(-K_0\int_0^t E(\tau)d\tau)\left\{V^{-\frac{1}{2}}(\dot{V}_{(6)} - 2K_0E(t)V)\right\} \tag{12}$$

由 $V > 1$ 知 $\sqrt{V} < V$，从而有

$$\dot{V}_{(6)} - 2K_0E(t)V \leqslant \dot{V}_{(6)} - 2K_0E(t)\sqrt{V} \leqslant 0$$

即 $\dot{W}_{(6)} < 0$，注意到条件(iv)及(v)，而 $0 < \mu < 1$，故当 $x \to +\infty$ 时 $W \to +\infty$，但 $\dot{W} < 0$，这实际上蕴函 x 是有界的，再利用条件(ii)知当 $y \to \pm\infty$ 时 $W \to +\infty$，而 $\dot{W} < 0$，这实际上蕴函 y 也是有界的. 因此对系统(6)的任一解 $x(t) = x, y(t) = y$，y 有界而 x 正向有界.

情形 Ⅰ，当 $x < -K$ 时，考虑函数

$$U = U(t,x,y) = \int_0^y \frac{u}{h(u)}du - \int_0^y \frac{u}{\varphi(u)}du + 4M + \mu(G(x) - F(x)) + l_2 \quad (0 < \mu < 1) \tag{13}$$

注意到 $x < -K$ 时，只要 $|x|$ 适当大就有 $-F(x) > 0$，$l_2 > 0$ 是保证 $\mu(G(x) - F(x)) + l_2 > 1$ 的某个常数，由条件(ii)及条件(iii)知只要 $M > 0$ 适当大就有 $U > 1$，此时

$$\dot{U}_{(6)} = -\frac{\mu f(x)\varphi(y)y}{h(y)} + \frac{\mu g(x)h(y)y}{\varphi(y)} + \frac{\mu e(t,x,y)y}{h(y)} - \frac{\mu e(t,x,y)y}{\varphi(y)} \tag{14}$$

上式右端第一项 $\leqslant 0$，注意到 $x < -K$ 时 $g(x) < 0$，从而第二项 $\leqslant 0$，因此仍有

$$\dot{U}_{(6)} \leqslant \frac{\mu e(t,x,y)y}{h(y)} - \frac{\mu e(t,x,y)y}{\varphi(y)} \leqslant \frac{|e(t,x,y)||y|}{h(y)} + \frac{|e(t,x,y)|y}{\varphi(y)} \leqslant 2K_0E(t)\sqrt{U}$$

仍然定义函数 $W = exp(-K_0\int_0^t E(\tau)d\tau)\sqrt{U}$，则用与情形 Ⅰ 相同的分析，可知 $x(t)$ 也是负向有界的，因此系统(6)从而算子方程(5)的所有解有界. 据 *Leray-Schauder* 不动点定理([6]定理3.3)，系统(1)至少存在一个概周期解.

注：本文研究的方程较[9]复杂，而证明过程较[9]简洁，所要求的条件(V)也较[9]中 $F(x) \to +\infty (x \to \pm\infty)$ 同时 $G(x) \to +\infty$ 为弱. [9]中的相关定理可以作为本文的推论.

参考文献

1 韩茂安. 关于阻尼可负的二阶非线性方程的有界解周期解及振荡解. 南京大学学报，1984，(1).
2 周毓荣. 常微分方程的比较定理及其应用. 数学学报，1978，21 (4)：313～325.
3 Yoshizawa T. Liapunov's function and boundedness of solutions. Funkcialaj Ekvacioj，1959，(2).
4 秦元勋，王慕秋，王联. 运动稳定性理论与应用. 北京：科学出版社，1981.
5 郑祖庥等译. 稳定性理论与周期解和概周期解的存在性. 南宁：广西人民出版社，1985.
6 郭大钧. 非线性泛函分析，济南：山东科学技术出版社，1985.
7 Lasalle J，Lefschetz S. Stability by Liapunov's direct method with applications. New York：Academic Press，

1961.

8 Hale J ,Oscillations in nonlinear systems,McGraw-Hill series in advanced mathematics and applications. New York: Toronto, London, 1963.

9 Ezeilo J . On the existence of almost periodic solutions of some dissipative second order differential equations. Ann Math pura Appl, 1964, 65 (137): 389~410.

The Existence of Almost Periodic Solutions of Second Order Nonlinear Differential Equation

Feng Chunhua
(Guanxi Normal University, Guilin, 541004)
Zhuang Xingyi
(Wuzhou High Teacher-Training School, Hexian, 542800)

Abstract By using the Leray-Schauder fixed point theorem and the method of Liapunov's function, We investigate the existence of almost periodic solutions of the second order nonlinear differential equation, a sufficient condition is obtained.

Key words nonlinear differential equation, Leray-Schauder fixed point theorem, Liapunov's function, almost periodic solution

(上接第5页)

对此，应尽早研究、决策，使之同洛（阳）湛（江）大能力通道要求相一致，同国外投资商的意愿相吻合，这对于大能力通道方案的成立，对于引进外资加快铁路建设步伐，都具有重大意义。

眼下，改变原定走向也是适时的，只有利而无害。为了做好这项变更工作，特提出以下几点建议：

（1）提请广西壮族自治区玉梧铁路建设领导小组研究决定，并向各有关县市做好解释工作。（2）对岑溪—梧州段初步设计文件不再组织审查。并请设计单位抓紧补做B方案中容县—藤县段勘测设计，其中容县站站址照已批准的初步设计不变；玉林、梧州、容县、岑溪站的站型、引入线等，应尽可能按大能力通道的要求和干支线方案进行修改，并提出容县—梧州段初步设计。

（3）玉梧铁路的干线标准，原则上应同大能力通道标准相一致；容岑支线标准仍按自治区建委批准的标准不变。

（4）将改变玉梧铁路走向的决定抄报铁道部、国家计委及其他部门，表明在建的玉梧铁路已适应大能力通道的要求。

（5）抓紧做好岑溪至罗定铁路的前期工作，尽早形成容（县）罗（定）联络线的完整的设计文件，以利吸引外资。如果此项工作做得好而快，在桂东南有可能首先建成通向广东的便捷通道。