第9卷 第1期　　广西科学院学报　　Vol. 9, No.1
1993年5月　　Journal of the Guangxi Academy of Sciences　　May, 1993

变系数系统的稳定性

冯春华　　　　韦忠辉

(广西师范大学数学系 桂林 541004)　　(桂林经济干校 桂林)

摘要 应用构造李雅普诺夫函数的方法，讨论了一类变系数系统的稳定性。

关键词 变系数系统 李雅普诺夫函数 稳定性

在工程控制问题中，经常出现非线性系统。为了处理问题的方便，有时往往将一些非线性系统线性化处理为变系数线性系统。因此研究时变线性和非线性系统解的稳定性具有实际意义。应用李雅普诺夫函数研究解的稳定性是一个有力的工具，但对于一个给定的系统，如何构造李雅普诺夫函数，一般说来，没有一个统一的方法，这里构造出指数函数乘二次型的李雅普诺夫函数，得到了若干比较简明的稳定性判据。

考虑三阶变系数线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 \qquad (\cdot = d/dt) \\ \dot{x}_3 = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 \end{cases} \tag{1}$$

这里 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,3)$ 在 $R^+=[0,\infty)$ 上连续。

定理 1 若系统 (1) 满足下述条件

(Ⅰ) $a_{ii}(t) < 0 \quad (i=1,2,3)$

(Ⅱ) $\int_0^\infty (|a_{12}(t)+a_{21}(t)| + |a_{13}(t)+a_{31}(t)| + |a_{23}(t)+a_{32}(t)|)dt < \infty$ 则系统 (1) 的零解一致稳定。

证明 作系统 (1) 的李雅普诺夫函数为

$$V=V(t,x_1,x_2,x_3)=\exp\{-\int_0^t (|a_{12}(s)+a_{21}(s)| + |a_{13}(s)+a_{31}(s)| + |a_{23}(s)+a_{32}(s)|ds\} (x_{21}+x_{22}+x_{23}) \tag{2}$$

容易看出

$$\exp\{-\int_0^\infty (|a_{12}(s)+a_{21}(s)| + |a_{13}(s)+a_{31}(s)| + |a_{23}(s)+a_{32}(s)|)ds\} \cdot (x_1^2+x_2^2+x_3^2) < V(t,x_1,x_2,x_3) < x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

注意到 $-|a_{12}(t)+a_{21}(t)|(x_1^2+x_2^2) < -2(a_{12}(t)+a_{21}(t))x_1x_2$

计算 V 沿系统 (1) 关于 t 的导数，得

1992年5月12日收稿

$$\dot{V}|_{(1)}=\exp\{-\int_0^t(|a_{12}(s)+a_{21}(s)|+|a_{13}(s)+a_{31}(s)|+a_{23}(s)+a_{32}(s)|)ds\}$$
$$\cdot\{(-|a_{12}(t)+a_{21}(t)|-|a_{13}(t)+a_{31}(t)|-|a_{23}(t)+a_{32}(t)|)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$+2x_1(a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3)+2x_2(a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+a_{23}(t)x_3)$$
$$+2x_3(a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)x_3)\}<2\exp\{-\int_0^t(|a_{12}(s)+a_{21}(s)|$$
$$+|a_{13}(s)+a_{31}(s)|+|a_{32}(s)+a_{23}(s)|)ds\}(a_{11}(t)x_1^2+a_{22}(t)x_2^2+a_{33}(t)x_3^2)<0$$

由 V 正定，且 $\dot{V}|_{(1)}<0$ 知系统 (1) 的零解一致稳定。

再考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}(t)f_1(x_1)+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3\\ \dot{x}_2&=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)f_2(x_2)+a_{23}(t)x_3\\ \dot{x}_3&=a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)f_3(x_3)\end{aligned}\tag{3}$$

这里 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,3)$ 在 $R^+=[0,\infty)$ 上连续，$f_i(x_i)\in C'$ 且 $f_i(0)=0$ $(i=1,2,3)$

定理 2 假设系统 (3) 满足定理 1 中的条件（Ⅰ）、（Ⅱ）以及下述条件

（Ⅲ） $x_if_i(x_i)>0$ $(x_i\neq 0)$ $(i=1,2,3)$

则系统 (3) 的零解一致稳定.

证明 仍取 (2) 式作为系统 (3) 的李雅普诺夫函数，注意到条件（Ⅰ）、（Ⅲ），计算 V 沿系统 (3) 关于 t 的导数，得

$$\dot{V}|_{(3)}=\exp\{-\int_0^t(|a_{12}(s)+a_{21}(s)|+|a_{13}(s)+a_{31}(s)|+|a_{23}(s)+a_{32}(s)|)ds\}\cdot\{(-|a_{12}(t)+a_{21}(t)|$$
$$-|a_{13}(t)+a_{31}(t)|-|a_{23}(t)+a_{32}(t)|)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1(a_{11}(t)f_1(x_1)+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3)$$
$$+2x_2(a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)f_2(x_2)+a_{23}(t)x_3)+2x_3(a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)f_3(x_3))\}\leq 2\exp\{-\int_0^t(|a_{12}(s)$$
$$+a_{21}(s)|+|a_{13}(s)+a_{31}(s)|+|a_{23}(s)+a_{32}(s)|)ds\}\cdot(a_{11}(t)f_1(x_1)x_1+a_{22}(t)x_2f_2(x_2)+a_{33}(t)x_3f_3(x_3))<0$$

从而系统 (3) 的零解一致稳定。

由定理 1、定理 2 的证明过程我们可以得到如下推论。

推论 1 考虑变系数线性系统

$$\dot{x}=A(t)x \tag{4}$$

这里系统矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在 $R^+=[0,\infty)$ 上连续，x 为 n 维向量 $(n>4)$

若系统 (4) 满足下述条件

（Ⅳ） $a_{ii}(t)<0$ $(i=1,2,\cdots,n)$

（Ⅴ） $\int_0^\infty(\sum_{i\neq j}|a_{ij}(s)+a_{ji}(s)|)ds<\infty$ $\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$

则系统 (4) 的零解一致稳定.

证明 取系统 (4) 的李雅普诺夫函数为

$$V=V(t,x)=\exp\{-\int_0^t(\sum_{i\neq j}|a_{ij}(s)+a_{ji}(s)|)ds\}\cdot\sum_{i=1}^n x_i^2$$

计算 V 沿系数 (4) 关于 t 的导数必有 $V|_{(4)}<0$, 因而系统 (4) 的零解是一致稳定的.

推论 2 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}(t)f_1(x_1)+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n\\ \dot{x}_2&=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)f_2(x_2)+\cdots+a_{2n}(t)x_n\\ &\cdots\cdots\\ \dot{x}_n&=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)f_n(x_n)\end{aligned}\tag{5}$$

若 $a_{ij}(t)$ 在 $R^+=[0,\infty)$ 上连续，$a_{ij}(t)<0$，$f_i(0)=0$，$f_i(x_i)\in C'$，$x_if_i(x_i)>0(x_i\neq 0)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，并且推论1中的条件（V）成立，则系统(5)的零解是一致稳定的。

例1 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-3xe^{-x}-\dfrac{1}{1+t}y+\dfrac{1}{(1+t)^2}z\\ \dot{y}=\dfrac{1}{1+t}x-\dfrac{10}{4-\sin t}y^3+\dfrac{1}{(1+t)^3}z \qquad 0<t<\infty)\\ \dot{z}=\dfrac{2}{(1+t)^2}x-\dfrac{3}{(1+t)^3}y-tz^3e^{-t}\end{cases} \tag{6}$$

零解的稳定性

解：条件（Ⅰ）、（Ⅲ）显然成立，且有

$$\int_0^\infty\left(\left|-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+t}\right|+\left|\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1+t)^2}\right|+\left|\frac{1}{(1+t)^3}-\frac{3}{(1+t)^3}\right|\right)dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{3}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1+t)^3}\right)dt=4<\infty$$

因此条件（Ⅱ）也成立，由定理2知系统(6)的零解一致稳定。

例2 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-\dfrac{1}{4+\cos t}x_1-\dfrac{1}{1+t}x_2+\dfrac{1}{(1+t)^2}x_3\\ \dot{x}_2=\dfrac{1}{1+t}x_1-\dfrac{2}{(1+t)^2}x_2+\dfrac{1}{(1+t)^3}x_3-\dfrac{1}{(1+t)^4}x_4\\ \dot{x}_3=\dfrac{4}{(1+t)^2}x_1-\dfrac{2}{(1+t)^3}x_2-t_2x_3+\dfrac{1}{(1+t)^4}x_4\\ \dot{x}_4=\dfrac{1}{(1+t)^2}x_1+\dfrac{1}{(1+t)^4}x_2-\dfrac{1}{(1+t)^4}x_3-\dfrac{1}{2-\sin^2 t}x_4 \qquad (0<t<\infty)\end{cases} \tag{7}$$

解：易见推论1中条件（Ⅳ）成立，且有

$$\int_0^\infty\left(\left|-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+t}\right|+\left|\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{4}{(1+t)^2}\right|+\frac{1}{(1+t)^2}\right.$$

$$+\left|\frac{1}{(1+t)^3}-\frac{2}{(1+t)^3}\right|+\left|-\frac{1}{(1+t)^4}+\frac{1}{(1+t)^4}\right|$$

$$\left.+\left|\frac{1}{(1+t)^4}-\frac{1}{(1+t)^4}\right|\right)dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{6}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1+t)^3}\,)dt$$

$$=6\frac{1}{2}<\infty$$

从而条件（V）也成立，由推论1，系统(7)的零解一致稳定。

参考文献

1 郑祖庥等．稳定性理论与周期解和概周期解的存在性．南宁：广西人民出版社，1985：38 ～ 40．

2 雷明熔．变系统线性系统的稳定性．辽宁大学学报，1987(3)：1 ～ 11．

The Stability of the Linear and Nonlinear Systems with Varying Coefficients

Feng Chunhua (Guangxi Normal University, Guilin)

Wei Zhonghui (Guilin Economic Management School, Guilin)

Abstract By using the method of constructing Liapunov Function, the stability of the linear and nonlinear systems with varying coefficients is studied.

Key words Linear and nonlinear systems with varying coefficients, Liapunov Function, stability