第8卷 第2期
1992年11月

广西科学院学报
Journal of the Guangxi Academy of Sciences

Vol. 8, No.2
Nov, 1992

10)
97-72

球面函数与 Banach 空间几何特征

魏文展

(广西师范学院)

O177.2

摘 要 把支撑泛函作用到 Banach 空间单位球面的弧上，得到一类实值函数，并证明了 Banach 空间的许多基本几何特征可由此类实函数相应的性质刻划。

关键词 Banach 空间 严格凸 支撑泛函 光滑 Hilbert 空间 . 巴拿赫空间. 球面函数.

设 X 为 Banach 空间，S(X)为单位球面，又设 $A(X)=\{f\in S(X^*),\ f(x)=\|X\|\}$，并用 fx 表示 A(X) 中的元素，把 fx、fy 分别作用到 $\frac{x+ty}{\|x+ty\|}\in S(X)$ 上，便得到两个关于 t 的实函数 $fx(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$、$fy(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$。

我们首先讨论此类实函数本身的性质。

1 **引理 1** 设 X 为 Banch 空间，$x,y\in S(X)$，$y\neq\pm x$，则

i) $fx(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 关于 t 在 R^+ 上单调递减；

ii) $fy(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 关于 t 在 R^+ 上单调递增。

证 注意到 $fx(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})\xlongequal{s=\frac{1}{t}}fx(\frac{y+sx}{\|y+sx\|})$，故只要证 ii)即可。

令 $g(t)=fy(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$，则 $g(t)=\frac{fy(x)+t}{\|x+ty\|}$，易知 g(t) 是 R 上的绝对连续函数，依[2. 引理] $\|x+ty\|'_t\xlongequal{a.e}f_{x+ty}(y)$， 故 $g'(t)\xlongequal{a.e}\frac{\|x+ty\|-(f_y(x)+t)f_{x+ty}(y)}{\|x+ty\|^2}$。

$$\because\ |g(t)|=|\frac{fy(x)+t}{\|x+ty\|}|<1,\ 即\ \|x+ty\|>|fy(x)+t|$$

$$\therefore\ \|x+ty\|-(fy(x)+t)f_{x+ty}(y)>\|x+ty\|-|(fy(x)+t)f_{x+ty}(y)|>$$

$$\|x+ty\|-|fy(x)+t|>0$$

从而 $g'(t)\overset{a.e}{>}0$。再由 g(t) 的绝对连续性知 $g(t)=\int_0^t g'(t)dt+fy(x)$，这就证明了 g(t) 在 R^+ 上单调递增。证毕。

1992年6月15日收稿

2　引理 2　设 X 为 Banach 空间，$x、y \in S(X)$，$y \neq -x$，$f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$·($f_y(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$) 在 R^+上严格单调当且仅当在R^+上恒有 $|f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})|<1$，($|f_y(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})|<1$)。

证　与引理 1 相仿，我们只须对 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 证明之。

充分性　若 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 在 R^+ 上非严格单调，由引理 1，存在 $[t_1,t_2]\subset R^+$，使得 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|}) = \text{Const}\,(t\in[t_1, t_2])$。令 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=k$，$t\in[t_1, t_2]$。显然 $k\neq 0$。两边微分得

$$f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})'_t = \frac{f_x(y)\|x+ty\|-(1+tf_x(y))f_{x+ty}(y)}{\|x+ty\|^2}=0,$$

即 $f_x(y)\|x+ty\|-(1+tf_x(y))f_{x+ty}(y)=0$　(1)

故 $f_{x+ty}(y)=f_x(y)\frac{\|x+ty\|}{1+tf_x(y)}=\frac{f_x(y)}{k}$　(2)

注意到 $\|x+ty\| = f_{x+ty}(x)+tf_{x+ty}(y)$，再代回 (1) 并且合并得

$$f_x(y)f_{x+ty}(x)-f_{x+ty}(y)=0 \tag{3}$$

(2) 代入 (3) 得

$$f_{x+ty}(x)=\frac{1}{k}<1 \tag{4}$$

因 $|f_{x+ty}(x)|<1$，故 $|k|=1$，即 $|f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})| = |k| = 1$。这就与充分性的假定矛盾了。

必要性　由 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 的单调递减性及 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})<1$ 可知，若存在 t_0 使得 $|f_x(\frac{x+t_0y}{\|x+t_0y\|})|=1$，则在 $[0,t_0]$ 或 $[t_0,+\infty)$上恒有 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=1$，这与 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 在 R^+ 上严格单调矛盾。证毕。

3　定理 1　设 X是 Banach 空间，则 X 严格凸当且仅当 $\forall\, x、y \in S(X)$，$x\pm y\neq 0$，$f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ ($f_y(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$) 在 R^+ 严格单调。

证　充分性　若 X 非严格凸，则存在 $x、y\in S(X)$，$x\neq y$ 及 f_x 使得 $f_x(x)=f_x(y)=1$，进而有

$1>f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|}) = \frac{1+t}{\|x+ty\|}>1$，$t\in R^+$。矛盾。

必要性　若 X 严格凸，则 $\forall\, x、y\in S(X)$，$x\pm y\neq 0$，都有 $|f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})|<1$（否则

f_x 会在 x 及某点 $\frac{x+t_0y}{\|x+t_0y\|}$ $(t_0\in R)$，同时达到最大)，由引理 2 知 $f_y(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 在 R^+ 上严格单调，证毕。

如果对每个 $x\in S(X)$，在 $S(X^*)$ 中有 X 的唯一支撑泛函，则称 Banach 空间 X 是光滑空间。如果 Banach 空间 X 的范数满足下列条件，对任何 $X_0\in S(X)$ 和 $y\in S(X)$，及 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0,y)>0$，及数 $\rho(x_0,y)$，使得当 $|\lambda|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda}-\rho(x_0,y)\right|<\varepsilon$$

则称 X 是范数 G－可微空间。

4　定理 2

定理 2　设 X 是 Banach 空间，则 X 光滑当且仅当 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})$ 在 R^+ 上可微(对任何 $x、y\in S(X)$，$x\pm y\neq 0$)。

证　必要性　因 X 光滑⟹X 范数 G－可微，故极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|x+(t+h)y\|-\|x+ty\|}{h}$ 存在，进而 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=\frac{1+f_x(ty)}{\|x+ty\|}$ 关于 t 可微。

充分性　因 $f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=\frac{1+tf_x(y)}{\|x+ty\|}$ 可微，故 $\|x+ty\|$ 关于 t 可微，由 S.Masur 定理[3]，$\|x+ty\|'_t=f_{x+ty}(y)$，即 $f_{x+ty}(y)$ 连续，故依[1]定理 2 知 X 光滑，证毕。

5　定理 3

定理 3　设 X 是 Banach 空间，则 X 是 Hilbert 空间当且仅当对任何 $(x,y)\in M=\{(x,y)\in S(X)\times S(X)$，$\exists f_x$，使得 $f_x(y)=0\}$ 都有

$$f_x^2(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})+f_y^2(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=1$$

证　必要　　若 X 是 Hilbert 空间，则 $(x,y)\in M\Longrightarrow(y,x)\in M$，故

$$f_x(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=\frac{1}{\|x+ty\|}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$f_y(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=\frac{t}{\|x+ty\|}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

从而 $f_x^2(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})+f_y^2(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=1$

充分性　我们只须对二维空间证明之。

由 Loewner 引理[3]，$S(X,\|\cdot\|)$ 可被唯一的最小椭圆 E 所包含。在 X 上引进 Euclid 范数 $\|\cdot\|_E$，使 $E=S(X,\|\cdot\|_E)$。于是对 $x\in X$，恒有 $\|x\|_E<\|x\|$。又 $[X,\|\cdot\|]$ 与 $[x,\|\cdot\|_E]$ 均为 Banach 空间，据双范数定理存在 $C>0$，使得 $\|x\|_E<\|x\|<C\|x\|_E$，$(x\in X)$。以下只要证明 $\|x\|=\|x\|_E$ $(\forall x\in X)$，即可知 $[X,\|\cdot\|]$ 也是 Euclid 空间，更是 Hilbert 空间了。

由[3]，存在 $x、y\in S(x,\|\cdot\|)$ 使得 $f_x(y)=f_y(x)=0$，依充分性的假定

$$1=f_x^2(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})+f_y^2(\frac{x+ty}{\|x+ty\|})=\frac{1+t^2}{\|x+ty\|^2}$$

即 $\|x+ty\|^2=1+t^2\ (\forall t\in R^+)$。同理 $\|tx+y\|^2=1+t^2\ (\forall t\in R^-)$。对此 x, 有 $\alpha\in R$, 使得 $\alpha x\in S(x,\|\cdot\|_E)$, 取 $y_0\in S(X,\|\cdot\|_E)$, 使得 $(\alpha x,y_0)=0$, 其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示内积，则有

$$\|\alpha x+ty_0\|_E^2=1+t^2\ (\forall t\in R^+)$$

可以证明、$\sqrt{1+t^2}=\|\alpha x+ty_0\|$ 也成立。事实上，注意到文[1]中的约定 $f_{\alpha x}=f_x(\forall\alpha>0)$, 可以得

$$f_{\alpha x}(y_0)=(\alpha x,y_0)=0,\ f_{\alpha x}(\alpha x)=(\alpha x,\alpha x)=\|\alpha x\|_E^2=1,$$

$$f_{y_0}(\alpha x)=(\alpha x,y_0)=0,\ f_{y_0}(y_0)=(y_0,y_0)=\|y_0\|_E^2=1,$$

从而

$$f_x\left(\frac{\alpha x+ty_0}{\|\alpha x+ty_0\|}\right)=\frac{1}{\|\alpha x+ty_0\|}\left(f_x(\alpha x)+tf_x(y_0)\right)=\frac{1}{\|\alpha x+ty_0\|}$$

$$f_{y_0}\left(\frac{\alpha x+ty_0}{\|\alpha x+ty_0\|}\right)=\frac{1}{\|\alpha x+ty_0\|}\left(f_{y_0}(\alpha x)+tf_{y_0}(y_0)\right)=\frac{t}{\|\alpha x+ty_0\|}$$

依假定

$$f_x^2\left(\frac{\alpha x+ty_0}{\|\alpha x+ty_0\|}\right)+f_{y_0}^2\left(\frac{\alpha x+ty_0}{\|\alpha x+ty_0\|}\right)=1$$

故 $\dfrac{1}{\|\alpha x+ty_0\|^2}+\dfrac{t^2}{\|\alpha x+ty_0\|^2}=1$，即 $\sqrt{1+t^2}=\|\alpha x+ty_0\|$。特别地令 t=0 得 $\|\alpha x\|_E^2=1=\|\alpha x\|$. 故 $|\alpha|=1$, 即 $x\in S(X,\|\cdot\|_E)$。用同样的方法可得 $y\in S(X,\|\cdot\|_E)$。注意到 f_x、$f_y\in[X,\|\cdot\|]^*$ 也是 $[X,\|\cdot\|_E)$ 上的线性泛函，因 x、$y\in S\cap S_E$ (S、S_E 分别为 $(X,\|\cdot\|)$ 和 $(X.\|\cdot\|_E)$ 的单位球面)。设 f_x、$f_y\in S_E^*$，则 $1=f_x(x)=\|f_x\|_E=\sup|f_x(B_E)|>\sup|f_x(B)=\|f_x\|>f_x(x)=1$，其中 $B=\{Z\in X;\|Z\|<1\}$、$B_E=\{Z\in X;\|Z\|_E<1\}$、显然 $B\subset B_E$、即 $\|f_x\|=\|f_x\|_E$，同理 $\|f_y\|=\|f_y\|_E$。因而又由必要性可得

$\|x+ty\|^2=1+t^2=\|x\|_E^2+\|ty\|_E^2=\|x+ty\|_E^2\ \forall t>0$、将 y 换成 $-y$, 可得 $\|x+ty\|=\|x+ty\|_E\ (t<0)$。依 x、y 的线性无关性知 $\|x\|=\|x\|_E\ (x\in X)$，即 X 是 Hilbert 空间。证毕。

下面我们利用 $\|x+ty\|_t'\overset{a.e}{=}f_x+ty(y)$, $\|x+ty\|=f_{x+ty}(x)+tf_{x+ty}(y)$ 及 $f_{x+ty}(x)$, $f_{x-ty}(y)$ 分别在 $(0,+\infty)$ 上的单调增加性[1]，证明[4]中一个证明颇为复杂（用到一个非常复杂的引理）的命题。这便是如下的定理。

6 定理 设 X 为 Banach 空间，dimX=2, 对任一固定的 $P\in S(X)$, 将弧 $\widehat{P-P}\subset S(X)$ 记为 K, 其长度为 L, 对 K 上任一点 $g_k(s)$, 其中 s 表示 $\widehat{pg_k}\subset S(X)$ 的长度，则 $\Phi(s)=\|g_k(s)-p\|$ 是 $[0,L]$ 上的单调不减函数。

证 在 K 上取一点 q, 使 $f_q(p)=0$, 不妨设 $f_p(q)<0$, 否则我们可取 $-q\in -K$，并仍记为 q 及考虑 S(X) 的另一侧 $-K$。

令 $g(t)=\Phi(s(t))=\left\|\dfrac{q-tp}{\|q-tp\|}-p\right\|$。注意到 $s=0\Longrightarrow t=-\infty$ 及 $S=L\Longrightarrow t=+\infty$，故我们只须证 $\Phi(s(t))$ 是关于 t 的单调不减函数。因为

$$g'(t)=\bar{\Phi}(s(t))'=\left(\frac{1}{\|q-tp\|}\|q-v(t)p\|\right)' \quad (\text{其中 } v(t)=t+\|q-tp\|)$$

$$=\frac{f_{q-tp}(p)}{\|q-tp\|^2}\|q-v(t)p\|)+\frac{1}{\|q-tp\|}\|q-v(t)p\|)'$$

$$=\frac{f_{q-tp}(p)}{\|q-tp\|^2}\|q-v(t)p\|)+\frac{1}{\|q-tp\|}f_{q-v(t)p}(p)\cdot(-v(t))'$$

$$=\frac{f_{q-tp}(p)}{\|q-tp\|^2}\|q-v(t)p\|)+\frac{1}{\|q-tp\|}f_{q-v(t)p}(p)\ (f_{q-tp}(p)-1)$$

$$=\frac{1}{\|q-tp\|^2}[f_{q-v(t)p}(p)f_{q-v(t)p}(q)-f_{q-tp}(q)f_{q-v(t)p}(p)]$$

记 $(\triangle)=f_{q-tp}(p)f_{q-v(t)p}(q)-f_{q-tp}(q)f_{q-v(t)p}(p)$，根据 $g(t)$ 的绝对连续性，我们只须证 $(\triangle)>0$。

6.1 若 $f_{q-tp}(p)>0$，则 $t<0$，此时

$$\begin{aligned}f_{q-v(t)p}(q)&=\|q-v(t)p\|+v(t)f_{q-v(t)p}(p)\\&>1-|v(t)|=1-|t+\|q-tp\||\\&>1-[(1+|t|)-|t|]=0\end{aligned}$$

1° $f_{q-v(t)p}(p)<0$，则当 $f_{q-v(t)p}(p)=0$ 时，自然 $(\triangle)=f_{q-tp}(p)f_{q-v(t)p}(q)>0$，当 $f_{q-v(t)p}(p)<0$ 时，有 $v(t)>0$，即 $0<v(t)=t+\|q-tp\|=t+(f_{q-tp}(q)-tf_{q-tp}(p))\Longrightarrow f_{q-tp}(q)>-t(1-f_{q-tp}(p))>0$，这说明 $(\triangle)>0$。

2° $f_{q-v(t)p}(p)>0$，则 $0<-v(t)<-t$。因而 $0<f_{q-v(t)p}(p)<f_{q-tp}(p)$，即 $0<\dfrac{f_{q-v(t)p}(p)}{f_{q-tp}(p)}<1$。故

$$\begin{aligned}(\triangle)&=f_{q-tp}(p)\left[f_{q-v(t)p}(q)-f_{q-tp}(q)\cdot\frac{f_{q-v(t)p}(p)}{f_{q-tp}(p)}\right]\\&>f_{q-tp}(p)[f_{q-v(t)p}(q)-f_{q-tp}(q)]>0\end{aligned}$$

6.2 若 $f_{q-tp}(p)<0$，则 $t>0$，$v(t)>t+1$，因而 $f_{q-v(t)p}(p)<f_{q-tp}(p)<0$ 及 $0<-f_p(q)=f_{-p}(q)<f_{q-v(t)p}(q)<f_{q-tp}(q)$，进而

$$\begin{aligned}(\triangle)&=f_{q-v(t)p}(p)\left[\frac{f_{q-tp}(p)}{f_{q-v(t)p}(p)}\cdot f_{q-v(t)p}(q)-f_{q-tp}(q)\right]\\&>f_{q-v(t)p}(p)[f_{q-v(t)p}(q)-f_{q-tp}(q)]>0\end{aligned}$$

（注意 $0<\dfrac{f_{q-tp}(p)}{f_{q-v(t)p}(p)}<1$）

6.3 若 $f_{q-tp}(p)=0$，则 $1>f_{q-tp}(q)=\|q-tp\|>1$，故 $f_{q-tp}(q)=\|q-tp\|=1$，$v(t)=1+t$，下证 $f_{q-v(t)p}(p)<0$ 即可。假设 $f_{q-v(t)p}(p)>0$，则 $v(t)<0$，即 $-t>-v(t)>0$，因而 $0=f_{q-tp}(p)>f_{q-v(t)p}(p)>0$，矛盾。故此时也有 $(\triangle)>0$。证毕。

由上述定理的证明过程可以得到

7 **定理4** 设X是Banach空间，则X严格凸当且仅当$\Phi(S)$是[0,L]上的严格单调函数。

8 参考文献

1 程立新．Banach空间一类新的特征函数．王廷辅，陈连昌．哈尔滨科学技术大学学报，1988(3)

2 程立新．特征函数与Banach空间的凸性模、光滑模．陈连昌，魏文展．数学杂志，1990(3)

3 M M Day. Some characterizations of innerproduct spaces trans. Amer, Math., Soc.1947(62):320 ~ 337

4 J J Schaffer. Geometry of spheres in normed spaces. Lecture notes in pure and applied Math., Marcel Dekker, Inc, New York and Basel.Vol, 20.1976:16

Spherical Functions of Unit Ball and Geometric Characterization of Banach Spaces

Wei Wenzhan

(Guangxi Normal College)

Abstract This paper starts by considering the Linear functional fz $(\in \| z \|)$ defined on a sphere of unit ball which can be denoted by some real function defined on R. Some geometric characterization of Banach spaces can be described by some basic properties of the real functions.

Key words Banach space; Strictly convex; Supporting functional; Smooth; Hilbert space