Kerr— Newman— Kasuya 时空背景下的玻色子束缚态

沈 有 根
(中国科学院上海天文台)
罗 季 雄
(上海司达电致发光器件厂)
谭 振 强
(理论物理中心,CCAST(World Lab.)北京
和
广 西 大 学)

摘 要

本文讨论了Kerr— Newman— Kasuya时空背景下玻色子束缚态及裸奇点态问题及K— N— K裸奇点和荷电玻色子束缚态间的关系.

一、引 言

Kerr— Newman— Kasuya度规[1]为:

$$ds^2=\{1-\frac{2Mr-(Q^2+\Phi^2)}{\Sigma}\}dt^2+\frac{\Sigma}{\triangle}dr^2+\Sigma d\theta^2+\{\frac{[2Mr-(Q^2+\Phi^2)]a^2\sin^2\theta}{\Sigma}$$

$$+(r^2+a^2)\mathrm{Sin}^2\theta\}d\varphi^2-\frac{2[2Mr-(Q^2+\Phi^2)]a^2\mathrm{Sin}^2\theta}{\Sigma}dtd\varphi, \tag{1}$$

其中

$$\Sigma=\gamma^2+a^2\cos^2\theta,$$

$$\triangle=\gamma^2+a^2+\theta^2+\Phi^2-2Mr. \tag{2}$$

Klein-Gordon 方程为[2]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\frac{\partial}{\partial\times\mu}-ieA_\mu-igB_\mu)\times[\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\frac{\partial}{\partial\times\nu}-ieA_\nu-igB_\nu)]\Phi$$

$$=\mu^2\Phi, \tag{3}$$

1989年3月26日收稿

式中

$$A_0=-\frac{Qr-\Phi a\cos\theta}{\Sigma},$$

$$A_1=A_2=0 \quad ,$$

$$A_3=\frac{Qra\sin^2\theta}{\Sigma}+\Phi\left(1-\frac{r^2+a^2}{\Sigma}\cos\theta\right),$$

$$B_0=-\frac{\Phi r+Qa\cos\theta}{\Sigma},$$

$$B_1=B_2=0$$

$$B_3=\frac{\Phi ra\sin^2\theta}{\Sigma}-Q\left(1-\frac{r^2+a^2}{\Sigma}\cos\theta\right),\quad (t,r,\theta,\varphi)=(0,1,2,3) \tag{4}$$

为 Kerr— Newman— Kasuga 时空的电磁势[3]。

二、中性玻色子

(2.1)、$a^2+Q^2+\Phi^2=M^2$ 情况

考虑中性玻色子(例如π^0介子),(3)式简化为:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu]\Phi=\mu^2\Phi, \tag{5}$$

通过计算并分离变量可得径向方程. 当 $M^2=a^2+Q^2+\Phi^2$ 时该方程可简化为:

$$x^2R''+2xR'+\frac{1}{x^2}[b_{-2}+b_{-1}x+b_0x^2+b_1x^3+b_2x^4]R=0 \quad , \tag{6}$$

其中

$$b_{-2}=\left[EM\left(1+\frac{a^2}{M^2}\right)-\frac{ma}{M}\right]^2 \quad ,$$

$$b_{-1}=4EM\sqrt{b_{-2}} \quad ,$$

$$b_0=6E^2M^2+E^2a^2-\mu^2M^2-\lambda_{1,m} \quad ,$$

$$b_1=4E^2M^2-2\mu^2M^2$$

$$b_2=(E^2-\mu^2)M^2 \quad ,$$

式中 M, Q 及 Φ 分别为黑洞的质量、电荷及磁荷, μ 是玻色子质量, a 是黑洞的角动量, e、g 及 m 是荷电一荷磁粒子(双子)的电荷、磁荷及磁量子数。 角度部分的解是椭球谐函数, $\lambda_{1,m}$ 为

其本征值[4].

$\mu \neq 0$时，束缚态波函数解为:

$$R(\rho)=\rho^{A}e^{-\frac{\rho}{2}}F(1+A-B,2A+2,\rho),$$

这里

$$\rho=2\sqrt{b_2}\,x,$$

$$A=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4b_0}),$$

$$B=\frac{b_1}{2\sqrt{b_2}},$$

F是合流超比级数.

束缚态能级为:

$$E=\frac{ma}{M^2+a^2}=\frac{m\sqrt{M^2-Q^2-\Phi^2}}{2M^2-Q^2-\Phi^2}\quad\frac{4E^2-2\mu^2}{(\mu^2-E^2)^{\frac{1}{2}}}-(1+4\lambda_{1,m}+4\mu^2M^2-24E^2M^2-4E^2a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2n+1,$$

$$n=0,1,2,\cdots \tag{7}$$

当l足够大时，$\lambda=l(l+1)-\frac{1}{2}a^2(E^2-\mu^2)+0(l^{-2})$. 可以证明，(7)的解确实存在.

(2.2)、$0<a<\sqrt{M^2-Q^2-\Phi^2}$ 情况

磁精细结构常数为[5]:

$$g\simeq\frac{137n}{2}e, \tag{8}$$

引进荷质比概念，令

$$Q=\alpha_1 M,\qquad \Phi=\alpha_2 M, \tag{9}$$

即

$$\sqrt{Q^2+\Phi^2}=\alpha M,\quad \alpha=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \tag{10}$$

则可得径向方程:

$$x(x+2d)R''+2(x+d)R'+\frac{1}{x+2d}[a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3]R=0, \tag{11}$$

其中

$$a_1=4E\{2EM^2[(1+d)(1+d+d^2)]\}-2d(1+d^2)\mu^2M^2-2d(\lambda_{l,m}+E^2a^2),$$

$$a_2=4[(1+d)(2+d)+2\alpha^2]E^2M^2-(1+d)(1+5d)\mu^2M^2-(\lambda_{1,m}+E^2a^2),$$

$$a_3=4(1+d)E^2M^2-2(1+2d)M^2\mu^2,$$

$$a_4=-K^2=(E^2-\mu^2)M^2\ ,\quad E^2=\frac{ma}{2M^2(1+d)}\ , \tag{12}$$

并且

$$x\equiv\frac{(r-r_+)}{M}\qquad(0<x<\infty)$$

$$r_\pm\equiv M\pm\sqrt{M^2(1-\alpha^2)-a^2}\ ,$$

$$d\equiv\frac{1}{2M}(r_+-r_-)=\frac{1}{M}\sqrt{M^2(1-\alpha^2)-a^2}\ .$$

令$y=x+2d$，再令$R(y)=f(y)e^{-Ky}$，

可得$f(y)$的二阶方程:

$$y(y-2d)f''+[-2Ky^2+(2+4Kd)y-2d]f'+[b_0y^{-1}+(b_2-2K-2dK^2)$$
$$+(b_1+2dK)]f=0, \tag{13}$$

式中

$$b_0=a_1-2da_2+4d^2a_3-8d^3a_4\ ,$$
$$b_1=a_2-4da_3+12d^2a_4\ ,$$
$$b_2=a_3-6d_1a_4\ .$$

令$f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ny^n(c_0\neq 0)$，代入(13)式得三相邻系数的递推公式:

$$[b_2-2dK^2-2K(n+1)]c_n+[(n+1)(2+4Kd+n)+b_1+2dK]c_{n+1}$$
$$+[b_0-2d(n+2)^2]c_{n+2}=0\ . \tag{14}$$

为使$f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ny^n(c_0\neq 0)$不发散，只能令自某项$n'$开始为零。此时级数截断，亦即存在下式:

$$c_{n'}=-\frac{[b_2-2dK^2-2K(n+1)]c_{n'-2}+\{(n-1)(2+4Kd+n)+b_1+2dK\}c_{n'-1}}{b_0-2d(n+2)^2}, \tag{15}$$

为使$c_{n'}=0$，必须$c_{n'-2}$，$c_{n'-1}$的系数为零。因此截断等价于下述两方程:

$$\mu^2M^2=(n+1)K+2K^2\ , \tag{16}$$

$$(6-2d^2)K^2+[(7+2d-d^2)(n+1)+2d]k+\{(n+1)(n+2)$$
$$-[\lambda_{1,m}+\frac{m^2}{4}(1-d^2)]\}=0\ . \tag{17}$$

利用(12)式及d的恒等式又可将(16)式化为:

$$K^2+(n+1)K-\frac{m^2}{4}\left(\frac{1-d}{1+d}\right)=0. \tag{18}$$

(17)式和(18)式是同一个 K 的两个二次方程,若有解,则 K 的两根之和必相同。这导致 $(n+1)$。$(d+1)^2+2d=0$,但不存在任何正整数满足此式。因此证明除了 $d=0$ 之外,方程束缚态解。

三、荷电玻色子

这里我们讨论荷电玻色子(例如$\pi^{\pm}$介子)。这时回到 Klein— Gordon 方程(3)。

将(3)式化为如下形式:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu-ieA_\mu)[\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\partial_\nu-ieA_\nu)]\Phi=\mu^2\Phi\ , \tag{19}$$

经过适当计算并分离变量:

$$\Phi=\partial^{i(m\varphi-Et)}\Theta(\theta)R(r)\ ,$$

且引入变换:

$$dU=-\frac{dr}{\triangle}\ ,\quad \delta=2d=r_+-r_-\ ,x=r-r_+$$

得径向方程:

$$\frac{d^2R}{du^2}+\{[E(x^2+\delta x)+(2ME-eQ)x+(2Mr_+-Q^2-\Phi^2)\times(E-\frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2})]^2$$

$$-(x^2+\delta x)[M^2x^2+2r_+\mu^2x+\mu^2r_+^2+\lambda_{l,m}]\}R=0\ , \tag{20. a}$$

或者

$$(x^2+\delta x)^2\frac{d^2R}{dx^2}+(2x+\delta)(x^2+\delta x)\frac{dR}{dx}+\{[E(x^2+\delta x)+(2ME-eQ)x$$

$$+(2Mr_+-Q^2-\Phi^2)(E-\frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2})]^2-(x^2-\delta x)(\mu^2x^2+2r_+\mu^2x+\mu^2r_+^2+\lambda_{l,m})\}R$$

$$=0\ 。 \tag{20. b}$$

以下分两种情况讨论。

(3.1) $a=\sqrt{M^2-Q^2-\Phi^2}$ 情况

(1)当 $E\neq\dfrac{m\sqrt{1-\alpha^2}+eQ}{M(2-\alpha^2)}$ 时,在 $x\to 0$ 处,(20. a)式的渐近解为:

$$R\to e\times p\{\pm i(2M^2-Q^2-\Phi^2)[E-\frac{m\sqrt{1-\alpha^2+eQ}}{M(2-\alpha^2)}]/x\}\ , \tag{21}$$

因为(21)式是具有无限多节点的共振态,R 在 $x\to 0$ 处非正则,故无束缚态存在。

(2)、当 $E=\dfrac{m\sqrt{1-\alpha^2}+eQ}{M(2-\alpha^2)}$ 时，在 $x\to\infty$ 处(20. b)式有如下形式:

$$x^4\frac{d^2R}{dx^2}+2x^3\frac{dR}{dx}+\{(E^2-\mu^2)x^4+[2E(2ME-eQ)-2\mu^2M]x^3$$

$$[\lambda_{l,m}+\mu^2M^2-(2ME-eQ)^2]x^2\}R=0, \tag{22}$$

将(22)式改写为:

$$R''+\frac{2}{x}R'-\{\frac{L^*}{x^2}-[-(\mu^2-E^2)+\frac{4ME^2-2eQE-2\mu^2M}{x}]\}R=0 , \tag{23}$$

其中 $L^*=\lambda_{l,m}+\mu^2M^2-(2ME-eQ)^2$. (24)

$\mu\neq0$ 时束缚态波函数为:

$$R(\rho)=\rho^A e^{-\rho/2}F(1+A-B , 2A+2 ,\rho), \tag{25. a}$$

其中 $\rho=2\sqrt{\mu^2-E^2}\ x$,

$$A=\frac{1}{2}(-1\sqrt{1+4L^*}),$$

$$B=\frac{2E^2M-eQE-\mu^2M}{(\mu^2-E^2)^{\frac{1}{2}}} , \tag{25. b}$$

F 是合流超比级数。

令 $R(\infty)\to e^{-\frac{\rho}{2}}\to0$, F 退化为多项式, 此时要求 $2(B-A-1)+1=N=2n+1(n=0 , 1 ,2 ,\cdots)$, 代入(25. b)式, 得:

$$\frac{4ME^2-2eQE-2\mu^2M}{(\mu^2-E^2)^{\frac{1}{2}}}-(1+4L^*)^{\frac{1}{2}}=N\ 1。 \tag{26}$$

(26)式成立的前提条件是:

$$\mu>E>\frac{eQ+(e^2Q^2+8\mu^2M^2)}{4M} . \tag{27}$$

将 $E=\dfrac{m\sqrt{1-\alpha^2}+eQ}{M(2-\alpha^2)}$ 代入(27)式 ,

得:

$$\frac{\mu M(2-\alpha^2)-eQ}{(1-\alpha^2)^{1/2}}>M>\frac{(2-\alpha^2)ME^*_{+}-eQ}{(1-\alpha^2)^{1/2}} , \tag{28}$$

其中 $E^*_{\pm}$ 为 $4ME^2-2eQE-2\mu^2M=0$ 的根。

当 $\Phi=0$时, (28) 式与文献[6]的结果相符, 当 $\Phi=0$时, $Q=0$时, (28) 式与文献[7]结果相符。

适当选取 N、L^* 及 m，可使(26)式得到满足，因此证明了 $\mu\neq 0$，$a=\sqrt{M^2-Q^2-\Phi^2}=M\sqrt{1-\alpha^2}$ 情况，荷电玻色子存子束缚态，其能级为：

$$E=\frac{m\sqrt{1-\alpha^2}+eQ}{M(2-\alpha^2)}\quad .$$

(3.2)、 $0<a<\sqrt{M^2-Q^2-\Phi^2}$ 情况

(1)、当$\neq \frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2}$ 时，$x\to 0$处方程(20.a) 化为：

$$\frac{d^2R}{d\mu^2}+[(2Mr_+-Q^2-\Phi^2)(E-\frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2})]^2R=0 \tag{29}$$

令

$$\gamma=(2Mr_+-Q^2-\Phi^2)(E-\frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2}\quad ,$$

(29)式有解：

$$R=c_0e^{\pm i\gamma\mu}=c_0e^{\pm i(\gamma/\delta)\ln(1+\frac{\delta}{x})}\quad , \tag{30}$$

因为 R 在 $x\to 0$ 处非正则，故无束缚态存在。

(2)、当 $E=\frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2}$ 时，在 $x\to 0$ 处，(20.b)式为：

$$x\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{dR}{dx}-L^2R=0\quad , \tag{31}$$

其中

$$L^2=\frac{(\mu^2r_+^2+\gamma_{l,m})}{\delta}\quad .$$

令 $y=\sqrt{x}$，(31) 式可以化为零阶虚宗量 Bessel 方程：

$$\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{1}{y}\times\frac{dR}{dy}-4L^2R=0\quad , \tag{32}$$

仿文献[6]，在 $0<x<\infty$ 区间内，至少存在一个 x_0，使得 $R(x_0)$ 取极大值，即对束缚态，必满足条件：

$$R'(x_0)=0,\qquad R''(x_0)<0\quad , \tag{33}$$

否则 R 便是非束缚态。

考虑 $R'(x_0)=0$，并且$E=\frac{am+eQr_+}{2M_+-Q^2-\Phi^2}$ ，

由(20. b)式，即有

$$R''(x_0) = -\frac{J}{(x_0^2+\delta x_0)^2} \quad , \tag{34}$$

其中

$$J = b_4x_0^4 + b_3x_0^3 + b_2x_0^2 + b_1x_0 \quad , \tag{35}$$

而

$$b_4 = E^2 - \mu^2 \ ,$$

$$b_3 = 2(2M+\delta)E^2 - 2eQE - 2r_+\mu^2 - \delta\mu^2 \ ,$$

$$b_2 = [(2M+\alpha)E - eQ]^2 - (\mu^2r_+^2 + \lambda_{l,m} + 2\alpha r_+\mu^2) \ ,$$

$$b_1 = -(\mu^2r_+^2 + \lambda_{l,m})\delta \ 。$$

因为束缚态要求 $E<\mu$, 则 $b_4<0$ 又显然 $b_1<0$，故若 $b_2<0$,$b_3<0$ 成立，则必有:

$$R''(x_0) = -\frac{J}{(x_0^2+\delta x)^2} > 0 \quad ,$$

此与(33)式予盾。因此 $b_2<0$,$b_3<0$ 时必无束缚态存在。由 $b_2<0$,$b_3<0$，可得两不等式:

$$\omega^+ > E > \bar{\omega} \quad , \tag{36}$$

$$E_+ > E > E_- \quad , \tag{37}$$

其中

$$\omega^\pm = \frac{e^2(r_+^2-a^2)}{2Qr_+} \pm \left[\frac{e^2(r_+^2-a^2)}{4Q^2r_+^2} + \frac{a^4\mu^2}{2Q^2r_+^2}\right]^{1/2} \ ,$$

$$E_\pm = \frac{eQ}{2\delta+4M} \pm \frac{[e^2Q^2+(2r_++\delta)(2\delta+4M)\mu^2]^{1/2}}{4r_+} \ ,$$

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-Q^2-\Phi^2} = M(1 \pm \sqrt{1-\alpha^2} \ .$$

四、荷电玻色子与K－N－K裸奇点

利用线性微分算子自共轭方法[8]可以讨论 K—N—K 型裸奇点和荷电玻色子束缚态间的关系。

回到方程(19)，将(19)式分离变量后得径向方程，进而化为能量本征方程:

$$(H_{ij})\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad , \tag{38}$$

其中矩阵元为[8]:

$$H_{11}=-\frac{A^4}{2\mu}\times\frac{d^2}{d\mu^2}+A^2(am+eQr)-\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+\lambda_{l,m})]+\frac{\mu}{2}\quad,$$

$$H_{12}=-\frac{A^4}{2\mu}\times\frac{d^2}{d\mu^2}+A^2(am+eQr)-\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+\lambda_{l,m})]-\frac{\mu}{2}\quad,$$

$$H_{21}=\frac{A^4}{2\mu}\times\frac{d^2}{d\mu^2}-A^2(am+eQr)+\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+\lambda_{l,m})]+\frac{\mu}{2}\quad,$$

$$H_{22}=\frac{A^4}{2\mu}\times\frac{d^2}{d\mu^2}+A^2(am+eQr)+\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+\lambda_{l,m})]-\frac{\mu}{2}\quad,$$

其中 $A^2=\frac{1}{r^2+a^2}$.

由(38)式解得:

$$[-\frac{2A^4}{\mu+E}\times\partial_\mu^2+p_l(r)]f_l=\frac{2E^2}{\mu+E}f_l\quad,\tag{39}$$

及

$$p_l(r)\equiv\frac{2\mu}{\mu+E}\{\frac{A^4}{\mu}[(am+eQ)^2-\triangle(\mu^2r^2+\lambda_{l,m})]-2A^2(am+eQr)\frac{E}{\mu}\}\ ,\tag{40}$$

与文献[8]相同。取

$$p_0(r)=\frac{2(r^2+a^2)^2}{\mu+E}\quad,\tag{41}$$

则(39)式可写为自共轭微分表示:

$$l(f_l)\equiv[-\partial_{r'}(p_0\partial_{r'})+p_l]f_l=\frac{2E^2}{\mu+E}f_l\quad,\tag{42}$$

其中 $\frac{dr'}{dr}=\frac{(r^2+a^2)^2}{\triangle}$. 当 $r\to 0$ 时

$r'\to 0$; $r\to\infty$ 时, $r'\to\infty$.

可以证明, $\lambda=\frac{2E^2}{\mu+E}$ 在 $(-\infty,\frac{2\mu^2}{\mu+E})$

中只能是离散的,即

$$-\infty<\frac{2E^2}{\mu+E}<\frac{2\mu^2}{\mu+E}\quad,\tag{43}$$

因此有

$$-\mu<E<\mu\quad,\tag{44}$$

其中

$$E=\frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2} \tag{45}$$

条件(44)在一定意义上是普适的。它给出在K－N－K裸奇点周围形成束缚态的可能性；而当$\Phi=0$时，则给出在K－N裸奇点周围形成束缚态的可能性；当$\Phi=0$时，$Q=0$时，则给在K裸奇点周围形成束缚态的可能性。

在$\mu=0$时情况，(39)式化为：

$$[-\frac{2A^4}{e}\partial_\mu^2+p_1'(r)]f_1=2Ef_1 \quad , \tag{46}$$

其中

$$p_1'(r)=\frac{2}{E}\{A^4[(am+eQr)^2-\triangle\lambda_{l,m}]-2A^2E\times(am+eQr)\} \quad , \tag{47}$$

根据自共轭微分表示理论，不能得到离散谱，因此对$\mu=0$的玻色子不存在束缚态。

五、结　论

总结上面的讨论，我们得出如下结论：

有质量的Klein—Gordon方程在中性玻色子极端黑洞形式($M^2=a^2+Q^2+\Phi^2$)下存在束束缚态解。在普遍情形($0<a<M\sqrt{1-\alpha^2}$)下不存在束缚态解。对荷电玻色子情况，有质量的K－G方程在极端黑洞形式下，束缚态能量为$E=\frac{m\sqrt{1-\alpha^2+eQ}}{M(2-\alpha^2)}$。在$0<\alpha<M\sqrt{1-\alpha^2}$情形下，如$E\neq\frac{am+eQr_+}{2Mr_+-Q^2-\Phi^2}$则无束缚态解；如$\frac{am+eQr_+}{2M_+-Q^2-\Phi^2}$，则非束缚态存在的必要条件与文献[6]所得相同。从K—N—K型裸奇点和荷电玻色子束缚态间的关系表明，对有质量情况，玻色子的Hamiltonian算子在能限$(-\mu,\mu)$中公出现离散谱，K—N—K裸奇点周围有玻色子束缚态形成；$\mu=0$时则不存在束缚态。

作者感谢章世伟先生的有益讨论。

参考文献

(1)、M. Kasuya, Phys. Reu. D25(1982), 995.
(2)、J. Schwinger, Phys. Rev. D12(1975), 3105.
(3)、赵峥, 章德海, "科学通报", 29(1984), 11. 沈有根, "科学通报", 29(1984), 446.
(4)、P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, (1953).
(5)、J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, (1975) 2nd ed. (有中译本)上册.
(6)、李元杰, 张端明, 高能物理与核物理, 4(1986) 412.
(7)、章世伟、苏汝铿, 物理学报, 31(1982) 311.
(8)、李元杰, 高能物理与核物理, 2(1987), 198.

BOSON STRICTURE CONDITION IN THE TIME–SPACE BACKGROUND OF KERR–NEWMAN–KASUYA

Shen Yougen
(Shanghai Observatory of Chinese Academy of Sciences)
Luo Jixiong
(Shanghai Sida Electrical Lighting parts plant)
Tan Zhenqiang
(Guangxi university)

ABSTRACT

This paper discusses the problem of boson stricture and naked singularity condition in the time–space background of Kerr–Newman–Kasuya and the relation between K–N–K naked singularity and charged boson Stricture Condition.