DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1989.02.013

完全数简介

罗海鹏　　麦洁华

（广西计算中心）　　（广西大学）

摘要：本文介绍了完全数的概念，发现历史，列举了在完全数领域内用简单易懂的方法还不能解决的一些主要问题。此外，我们还简要地介绍了梅审数、完全数与梅审数的关系、多重完全数及其他一些相关概念和公式。

若一个正整数除开它本身之外的各正因子之和正好等于它自己，就称该正整数为完全数。例如，6是最小的完全数，因为6除开本身以外的正因子有1，2和3，而1＋2＋3刚好等于6。完全数还可以换另一种定义方法，即完全数的全部正约数（包括自身，但不包括1）的倒数之和等于1。在意大利，人们把6这样的数看成象征美满的数字。我们再考查10和12。10除开本身之外的正因子有1，2和5，而1＋2＋5＝8小于10，它不是完全数。12除开本身之外的正因子有1，2，3，4，6，它们的和是16，大于12，它也不是完全数。在古希腊、罗马，人们就熟悉完全数的概念，当时把象10这样的数叫亏数，把象12这样的数叫盈数。完全数是很稀疏的，第二个完全数是28，第三个是496，第四个是8128，第五个是33550336，……

目前已经找出了二十八个完全数。从1952年发现的第十三个完全数开始，每一个新发现的完全数都是借助计算机算出来的。值得一提的是，第二十六个完全数是一个叫做诺尔的美国中学生于1979年发现的。第二十七个和二十八个完全数是美国计算机科学家斯洛温斯基发现的。第二十八个完全数是1983年找到的，这是由五万多位数字组成的非常大的数。

对于素数，欧几里德在二千二百年前就证明了它的个数是无穷的。但是对于完全数，一直到今天，没有人能够证明它的个数是无穷的还是有限的。甚至存不存在第二十九个完全数，现在还不知道。数学家们从直观上感觉，认为完全数的个数是无穷的。

一个数是偶数，又是完全数，则这个数叫偶完全数。一个数是奇数，又是完全数，则这个数叫奇完全数。迄今为止，没有找到一个奇完全数。已经知道，奇完全数如果有，它必须大于10^{120}，并且它至少有8个不同的质因子。

已经证明了：对于素数P，若$M=2^P-1$也为素数，则$M(M+1)/2=2^{P-1}(2^P-1)$为一偶完全数，不存在其他的偶完全数[1]。

上面命题中的M叫梅审数，已知能构成偶完全数的二十八个P的值为：

2，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127，521，607，1279，2203，2281，3217，4253，4423，9689，9941，11213，19937，21701，23209，44497，86243。

本文于1989年5月14日收到

$2^{86243}-1$也是迄今所知道的最大的素数。在这里，素数和完全数被紧密地联系在一起了。

这样的数所以叫梅审数，是因为法国神父梅审在1644年报导了他发现的十一个数，他当时认为$P=2$，3，5，7，13，19，31，67，127，257时，2^P-1是素数。1903年，在美国数学学会大会上，数学家柯尔做了一个非常奇特的一言不发的报告。只见他不停地在黑板上演算，最后给出了一个式子：$2^{67}-1=193707721\times761838257287$，即证明了梅审给出的这个数不是一个素数。这时，台下响起了热烈的喝采声，据说这还是该学会成立以来在学术交流大会上的第一次喝采。后来查明，梅审所列出的257也是错的，他还遗漏掉了61，89，107。

1742年，哥德巴赫提出猜测：每一个大于等于4的偶数都可以写成两个素数之和。这个问题看起来是这样的简单明了，但要想证明它却是如此的困难，以至直到现在还没有人能够证明它。在完全数的范畴里，也有类似的问题：①每一个大于46的偶数都可以表示为两个盈数之和；②每一个大于等于83160的整数都可以表示为两个盈数之和。与哥德巴赫猜测不同的是，上面两个猜测轻而易举地就被证明了[3]。

推广完全数的概念，可以有，如果一个正整数是它的所有正因子（包括这个数本身）之和的K倍，则这个数叫做K重完全数。在这个定义下，我们前面所说的完全数是二重完全数。一重完全数是不存在的。第一个三重完全数是120，第二个是672，它是欧拉找出来的，第三个是523776。第一个四重完全数是30240。直到今天，新的重完全数还在不断地被找出来。

向另一个方向推广完全数的概念，可以引出亲和数，用例子来说明它可能更清楚。220的所有正因子是1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110，它们的和是284，而284的所有正因子是1，2，4，71，142，它们的和是220，则我们称220和284是一对亲和数。这是最小的一对亲和数。费马发现了第二对亲和数17296，18416，笛卡尔接着给出了第三对，欧拉跟着给出了60对亲和数。到现在亲和数已被发现了900对以上。让人惊奇的是，虽然亲和数的概念在两千多年前就已经有了，而且历史上许多著名的数学家都研究过它，但第二对最小的亲和数1184，1210还是被漏掉了，它是在1866年被意大利16岁的男孩帕干尼尼发现的。

阿拉伯数学家塔别脱·本·科拉曾给出一个亲和数的公式：如果$a=3.2^n-1$，$b=3.2^{n-1}-1$，$C=9.2^{2n-1}-1$，这里n为大于等于2的自然数，并且a，b，c都为素数，则$2^n ab$和$2^n c$是一对亲和数。当$n=2$时，我们得到的是最小的一对亲和数220，284；当$n=4$时，我们得到的是费马给出的亲和数对17296，18416。

进一步还可以有亲和数链，例如12496，14288，15472，14536，14264是5个数组成的亲数链。以14316开头的亲和数链是由28个数组成的。

参考文献

〔1〕华罗庚，数论导引，科学出版社，1957年。

〔2〕熊全淹，初等整数论，湖北人民出版社，1982年。

〔3〕R·亨斯贝尔格，数学中的智巧，北京大学出版社，1985年。

〔4〕H·Eves, Introduction to the History of Mathematics, (3rd ed.) Holt, Rinehart and Winston (1969).

PROBLEM ABOUT PERFECT NUMBER

Mai Jieha
(*Guangxi University*)
Luo Haipeng
(*Computer Center of Guaugxi*)

ABSTRACT

In this paper, we introduce the concept of perfect number, the history about discovery of perfect numder, and describe the main problems unsolved in the field of perfect number by using a easy understandable way. In addition, we also give a brief introduction to Mersenne number, relations between perfect number and Mersenne number, multiperfect number, and other related concepts and formulas.