DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1983.01.007

干支纪年和公元纪年互化的公式

广西大学数学系　　麦结华

广西计算中心　　罗海鹏

提　　要

干支纪年和公元纪年的互化，一般用查表方法。本文借助于映射的概念给出它们之间转换的数学公式，并借助于代数中的有限阶巡回群及数论中的同余式的概念予以证明。

一、引言

学过历史的人，都知道中国近代史上有一些重大的事件，如甲午战争、戊戌变法、庚子赔款及辛亥革命等等。其中甲午、戊戌、庚子及辛亥等词，称之为干支，乃是汉语所特有的词汇，是我国阴历中用以表示年份的。究其作用，实与数词相仿。只是它采取六十进位制（即通常所谓的“六十甲子”），与通常习用的十进制记数法不同，又比较难记忆，所以现在许多人都不太熟悉它了。不过，由于我国几千年来都采用阴历干支纪年，所以研究历史的人还是需要掌握它。有许多年纪大的人在回忆往事的时候，也往往只知道干支纪年而不知道公元纪年。

因此，干支纪年和公元纪年之间的互化是很必要的。许多人在碰到这样的问题时，往往是拿自己熟悉的一个干支纪年和公元纪年的对应，比如辛亥革命发生在1911年，来推算其他年份。如果所要推算的年份距所熟悉的年份太远，则这个推算工作是很困难的。比较正规的方法是查一个对照表，但这仍不太方便。至于用公式来解决这个问题的，我们却未见有人搞过。

二、基本概念

干支纪年中每一个干支都是由一个天干及一个地支构成。所谓天干，乃是指甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸这十个字，而地支则是子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥这十二个字。从本质上说，它们的作用亦与序数词相仿，只是它们的使用場合没有序数词广泛而已。它们所对应的次序分别如表1及表2所示：

本文1983年4月7日收到

表 1

天干（x）	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
序号（a）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

表 2

地支（y）	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
序号（b）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

表 1 及表 2 是容易记忆的，因为我们只要按次序背出甲乙丙丁……这十个字及子丑寅卯……这十二个字即可。

全部干支，从甲子到癸亥，共有六十个。它们的次序以及所对应的一个公元年份可如表 3 所示：

表 3

干支年	甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未	壬申	癸酉	甲戌	乙亥
序　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
公元年	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935

干支年	丙子	丁丑	戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未	甲申	乙酉	丙戌	丁亥
序　号	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
公元年	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947

干支年	戊子	己丑	庚寅	辛卯	壬辰	癸巳	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥
序　号	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
公元年	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959

干支年	庚子	辛丑	壬寅	癸卯	甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥
序　号	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
公元年	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971

干支年	壬子	癸丑	甲寅	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥
序　号	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
公元年	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983

下面，对任二整数的集合A，B，我们记

$$-A=\{-a: a\in A\},$$

$$A+B=\{a+b: a\in A,\ b\in B\},$$

$$A\times B=\{ab: a\in A,\ b\in B\}。$$

对任二整数k，n，记

$$k\ (\bmod n)=\{k+ln: l=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\}.$$

更以X，Y及W分别表示10个天干，12个地支及60个干支的集合：

$$X=\{甲,\ 乙,\ \cdots,\ 癸\},$$

$$Y=\{子,\ 丑,\ \cdots,\ 亥\},$$

$$W=\{甲子,\ 乙丑,\ \cdots,\ 癸亥\}.$$

显然W可看作集合积X×Y的子集。令X，Y及W上的多值函数g，h及f为

$g(甲)=1\ (\bmod 10)$，$g(乙)=2\ (\bmod 10)$，…，$g(癸)=10\ (\bmod 10)$

$h(子)=1\ (\bmod 12)$，$h(丑)=2\ (\bmod 12)$，…，$h(亥)=12\ (\bmod 12)$；

$f(甲子)=1924(\bmod 60)$，$f(乙丑)=1925\ (\bmod 60)$，…，$f(癸亥)=1983(\bmod 60)$

对任$x\in X$，$y\in Y$及整数k，令

$$\begin{cases} x+k=g^{-1}\ [g(x)+k]\ ; \\ y+k=h^{-1}\ [h(y)+k]\ 。\end{cases} \tag{1}$$

据表3所示干支纪年的顺序易看出，对任$w=(x,\ y)\in W$及整数k，恒有

$$f(x+k,\ y+k)=f(x,\ y)+k \tag{2}$$

三、定理的证明

定理1、对任干支年号$w=(x,\ y)\in W$，w所对应的公元年份

$$f(x,\ y)=1923+6g(x)-5h(y)。 \tag{3}$$

证明：当$(x,\ y)=$甲子时，

$$1923+6g(甲)-5h(子)=1923+6\times1\ (\bmod 10)-5\times1\ (\bmod 12)$$
$$=1923+6\ (\bmod 60)-5\ (\bmod 60)=1924\ (\bmod 60)=f(甲子).$$

下面假定对某$(x,\ y)\in W$，已证（3）成立，那么，据（1）及（2）式，对下一个干支$(x+1,\ y+1)\in W$，亦有

$$f(x+1,\ y+1)=f(x,\ y)+1=1923+6g(x)-5h(y)+1$$
$$=1923+6\ [g(x)+1]-5\ [h(y)+1]$$
$$=1923+6g(x+1)-5h(y+1)。$$

因$W=\{甲子,\ 乙丑,\ \cdots,\ 癸亥\}=\{甲子,\ (甲+1,\ 子+1),(甲+2,乙+2),\ \cdots,$ $(甲+59,\ 子+59)\}$，故上述归纳法的两个步骤已足表明：对任$(x、y)\in W$，（3）式均

成立。定理1证完。

（3）式即是化干支纪年为公元纪年的公式。为了使用方便，这个公式也可以改写为

$$f(x,\ y)=1923+6a-5b+60n。$$

其中a为x对应的序数，b为y对应的序数，n根据具体情形，取某一个整数值。。

例1、中日甲午战争发生于哪一年？

解：甲对应于1，即$a=1$；午对应于7，即$b=7$。于是，$1923+6a-5b+60n=1923+6\times1-5\times7+60n=1894+60n$。另外，我们知道甲午战争发生于上一个世纪末，故必须取$n=0$。由此可知中日甲午战争发生于1894年。

至于把公元纪年化为干支纪年，我们有

定理2、对任公元年份n，n所对应的干支年号

$$f^{-1}(n)=(g^{-1}(n-1923),\ h^{-1}(n-1923))。\qquad (4)$$

证明：由f的定义可得

$$f[f^{-1}(n)]=n(\mathrm{mod}60),\qquad (5)$$

由（3）式可得

$$\begin{aligned}&f[g^{-1}(n-1923),\ h^{-1}(n-1923)]\\&=1923+6g[g^{-1}(n-1923)]-5h[h^{-1}(n-1923)]\\&=1923+6[(n-1923)(\mathrm{mod}10)]-5[(n-1923)(\mathrm{mod}12)]\\&=1923+6n(\mathrm{mod}60)-6\times1923-[5n(\mathrm{mod}60)-5\times1923]\\&=n(\mathrm{mod}60)。\end{aligned}\qquad (6)$$

因$f^{-1}f=$恒等映射1，由（5）及（6）式即可推出（4）式。定理2证完。

（4）式即是化公元纪年为干支纪年的公式。

例2、公元2000年是阴历的什么年？

解：$2000-1923=77$，$77\div10$，余数为7；$77\div12$，余数为5。第一个数7在表1中对应庚，第二个数5在表2中对应辰，所以2000年是阴历的庚辰年。

四、注记

1．在历史书中，使用的是公元1年，公元2年，……以及公元前1年，公元前2年，……为与上述计算公式相配合，我们规定公式中的公元0年即公元前1年，公元－1年即公元前2年，以此类推。

2．由于阴历的月份比阳历的同一月份晚几十天，因此，如果所研究的历史事件发生在阴历年底，则公元纪年要考虑是否需加1。例如，我们说癸亥年是1983年，其实只是从癸亥年正月初一到十一月二十八属于1983年，癸亥年的十一月二十九至这年的除夕都属于1984年，而1983年的一月一日至二月十二日则是属于壬戌年的。