DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1983.01.003

有限集合不同构的等价关系数

广西计算中心　罗海鹏

提　　要

关系是代数学中的一个基本概念，它在随着计算机科学的发展而流行起来的离散数学中，也占有一个重要的地位。等价关系是一类重要的关系。本文给出有限集合的不同构的等价关系数的解析公式，并给出它的递推公式的计算程序。

一、预备知识

本文的基本概念，均参照（1）、（2）。

定义、如果A、B是有限集合，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，则A与B的笛卡尔积$A\times B=\{(a_i, b_j)\mid 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m\}$。

由上面定义我们有$A^2=A\times A=\{(a_i, a_j)\mid 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n\}$。

定义、如果$R\subset A^2$，则R是集合A的关系。

定义、集合A的关系R，如果满足

i）自反性：$\forall x\in A$，$(x, x)\in R$，

ii）对称性：$\forall x, y\in A$，$(x, y)\in R\Rightarrow(y, x)\in R$，

iii）传递性：$\forall x, y, z\in A$，$(x, y)\in R$，$(y, z)\in R\Rightarrow(x, z)\in R$，

则R叫做集合A的等价关系。

定义、如果$[a]=\{x\mid(x, a)\in R\}$，这里R是等价关系，则$[a]$叫做关系R的一个等价类。

例1、如果集合A的元素个数是n，即$|A|=n$，则不同构的关系数为$2^{\;^{2}}$。

证明：

$|A^2|=n^2$，在这n^2个数对中，一个也不取，则组成空关系，这样的关系有$\binom{n^2}{0}$；取出一个数对，则组成一个元素的关系，这样的关系共有$\binom{n^2}{1}$个；……最后，取出所有的数对，则组成完全关系，这样的关系有$\binom{n^2}{n^2}$个。那么，各种不同的关系的总数为

$$\binom{n^2}{0}+\binom{n^2}{1}+\cdots+\binom{n^2}{n^2}=(1+1)^{n^2}$$

$$=2^{n^2}$$

即不同构的关系数为2^{n^2}个。

本文1983年3月21日收到

在这 2^{n^2} 个关系中，有多少是等价关系呢？这就是本文要讨论的问题。

定义、对有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a\}$，如果 $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，这里 $A_i \subset A$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$，满足

i) $A_i \neq \phi$, $1 \leqslant i \leqslant m$,

ii) $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$,

iii) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$,

则S叫做集合A的划分。

设A的所有划分的集合为 S^*，所有等价关系的集合为 R^*。

例2、S^* 和 R^* 的元素是一一对应的。

证明：

对于 $\forall S \in S^*$，不妨设 $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，则我们可以构造一关系 $R=A_1^2 \cup A_2^2 \cup \cdots \cup A_k^2$。对每一个确定的S，用我们的构造方法，得到的R是唯一的。

进一步考查上面的R，容易知道它满足

①自反性。因为对任意的 $x \in A$，总有 $x \in A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$，$(x, x) \in A_i^2$，而 $A_i^2 \subset R$，故 $(x, x) \in R$。

②对称性。因为对任意的 $x, y \in A$，如果 $(x, y) \in R$，由 $x \in A_i$，$y \in A_j$ $(1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k) \Rightarrow A_i = A$，即 $(x, y) \in A_i^2$，则 $(y, x) \in A_i^2 \Rightarrow (y, x) \in R$。

③传递性。因为对任意的 $x, y, z \in A$，如果 $(x, y) \in R$，$(y, z) \in R$，知 $x, y, z \in A_i \Rightarrow (x, z) \in A_i^2$。

因此，关系R是一等价关系，即 $R \in R^*$。

这样，我们构造了一个映射

f: $S^* \longrightarrow R^*$

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \longrightarrow A_1^2 \cup A_2^2 \cup \cdots \cup A_k^2$$

另一方面，对于任意的 $R \in R^*$，有R的所有的等价类 $[a_1]$，$[a_2]$，$\cdots$，$[a_k]$，而这些等价类满足

① $[a_i] \neq \phi$, $1 \leqslant i \leqslant k$,

因为对任意i，至少 $a_i \in [a_i]$。

② $[a_i] \cap [a_j] = \phi$, $i \neq j$,

因为如果不是这样，则有 $x \in [a_i]$ 且 $x \in [a_j] \Rightarrow (a_i, a_j) \in R \Rightarrow [a_i] = [a_j]$。

③ $\bigcup_{i-1}^{k} [a_i] = A$,

因为 $\forall x \in A$，$x \in [x]$。

那么，我们令 $S=\{[a_1], \cdots, [a_k]\}$，则 $S \in S^*$。

又每一个等价关系，它所对应的等价类的集合是唯一的。

故我们有一映射

g：$R^* \longrightarrow S^*$

$$[a_1]^2 \cup \cdots \cup [a_k]^2 \longrightarrow \{[a_1], \cdots, [a_k]\}$$

综上所述，S^*和R^*是一一对应的。

二、不同构的等价关系数

由以上讨论我们知道，对于有限集合A，不同构的等价关系数和它的不同的划分数是一样的。如果我们求出A的不同的划分数即得到了不同构的等价关系数。(3)用Bell数给出划分的数目和列表算法。本文给出划分的直接解析公式和划分的递推公式的计算程序。

定理1、对于n个元素的集合A，它的不同的划分数为

$$\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_i>0}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!\ k!}$$

证明：

设$S=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$是A的一个划分，这里$|A_1|=n_1$，$|A_2|=n_2$，…，$|A_k|=n_k$那么根据划分的定义知道$\Sigma n_i=n$，$n_i>0$（$i=1, 2, \cdots, k$）。下面讨论这种形式的划分的个数。

从n个元素中取n_1个的方式有$\binom{n}{n_1}$种，

从余下的元素中取n_2个的方式有$\binom{n-n_1}{n_2}$种，

……

最后，剩下的全部n_k个元素都取出来的方式有$\binom{n_k}{n_k}$种。

则在这种形式下的不同的划分数共有

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k}=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$

这是第一类斯特林数，即k个变量的多项式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$$

的$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ 项的系数。

k可取1，2，…，n，故总的划分数为

$$\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_i>0}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!\ k!}$$

上式的分母中有$k!$，这是因为对于每一个k，当n_1，…，n_k固定时，这k个数的任意一个排列得到的划分是同一个，故在求和的分母中，要加上$k!$。

由于对于n个元素的集合A，不同的划分数和不同构的等价关系的数目是一一对应的，故不同构的等价关系数为

$$\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_i>0}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!\ k!}$$

只要给出一个集合A，$|A|=n$，我们就可以通过上面的公式计算出不同构的等价关系数。不过这个计算特别繁，如果用计算机来算，这个程序也很不好编。

下面我们给出求n个元素的有限集合的划分数的一个递推公式，在实际应用中，它比上面的公式方便些。

设S_i为i个元素的集合的不同的划分数，并设$S_0=1$。

定理2、$S_n=S_{n-1}+\binom{n-1}{1}S_{n-2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}S_0$

证明：

设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。

$A\setminus\{a_1\}$的不同的划分数是S_{n-1}，这其中的每一个划分并上$\{\{a_1\}\}$，构成一个A的划分。

$A\setminus\{a_1, a_i\}$（$2\leqslant i\leqslant n$）的不同的划分数是$\binom{n-1}{1}\cdot S_{n-2}$，这其中的每一个划分并上$\{\{a_1, a_i\}\}$，构成A的一个划分，这些划分和上段那些划分显然是不同的。

$A\setminus\{a_1, a_i, a_j\}$（$i\neq j$，$2\leqslant i\leqslant n, 2\leqslant j\leqslant n$）的不同的划分数是$\binom{n-1}{2}\cdot S_{n-3}$，这其中的每一个划分并上$\{\{a_1, a_i, a_j\}\}$，即构成A的一个划分，这些划分和上面那些划分显然是不同的。

……

$\{a_i\}$（$i\neq 1$）的不同的划分数是$\binom{n-1}{n-2}\cdot S_1$，这些划分中的每一个并上$\{A\setminus\{a_i\}\}$，即构成A的一个划分，它和上面所有的划分都是不同的。

ϕ的划分数是1，我们不妨把它记为$\binom{n-1}{n-1}\cdot S_0$，这个划分并上$\{A\}$，构成A的一个划分，它和上面所有的划分是不同的。

故A的不同的划分的总数

$$S_n=S_{n-1}+\binom{n-1}{1}S_{n-2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}S_0$$

由$S_0=1$，有

$S_1=S_0=1$，

$S_2=S_1+\binom{1}{1}S_0=2$，

$S_3=S_2+\binom{2}{1}S_1+\binom{2}{2}S_0=5$，

$S_4=S_3+\binom{3}{1}S_2+\binom{3}{2}S_1+\binom{3}{3}S_0=15$，

……

往下，如用手算，还是很繁的。我们在Z—80B档微型计算机上用CBASIC语言编了个程序，它计算0～20个元素的集合的不同的划分数。程序如下：

```
DIM  S(20), C(19)
S(0)=1:S(1)=1:S(1)=1:C(0)=1
FOR  I=2 TO 20
S(I)=0
```

```
FOR k=1 TO I—1
C(k)=C(k-1)*(I-k)/k
NEXT k
FOR J=0 TO I-1
S(I)=S(I)+C(J)*S(J)
NEXT J
PRINT S(I)
NEXT I
END
```

上机计算，得到的结果列在下面：

$S_2 = 2$

$S_3 = 5$

$S_4 = 15$

$S_5 = 52$

$S_6 = 203$

$S_7 = 877$

……

$S_{18} = 682076806159$

S_{19}和S_{20}在这台计算机上已不能用整型数表示。

三、一个猜测

定义、对有限集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，如果$P=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，$A_i \subset A$ $1\leqslant i\leqslant k$，满足

i）$A_i \neq \phi$，$1\leqslant i\leqslant k$，

ii）$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$，

则P叫做集合A的一个复盖。

设P_i为i个元素的集合的不同复盖的总数，我们猜测

$$P_n=(2^{2^n-1}-1)-n(2^{2^{n-1}-1}-1)+n(2^{2^{n-2}-1}-1)-\cdots\pm n(2^{2^1-1}-1)$$

按这个公式计算

$P_1=1$，$P_2=5$，$P_3=109$，$P_4=32283$，…用穷举法检验，P_1，P_2，P_3都是对的，P_4数目太大，已无法这样验证。

参 考 书

（1）J.P.特伦布莱，R.马诺哈：离散数学结构及其在计算机科学中的应用，迟忠先等译，上海科技出版社，1982.4。

（2）D.F.Stanat,D.F.Mcallister:Discrete Mathematics in Computer Science, Prentice-Hall, Inc.1977.

（3）屠规彰：组合计数方法及其应用，科学出版社，1981.5，52—60。