

## ◆特邀专稿◆

## 一种增强多样性的改进型 NSGA II 算法\*

程文旗<sup>1</sup>,郭 华<sup>1</sup>,谢承旺<sup>1,2\*\*</sup>,韦 伟<sup>1</sup>,潘嘉敏<sup>1</sup>,龙广林<sup>1</sup>

(1. 南宁师范大学,计算机与信息工程学院,广西南宁 530000;2. 华南师范大学,数据科学与工程学院,广东汕尾 516600)

**摘要:**传统 NSGA II 算法通过计算个体的拥挤距离保持群体分布性。为改善算法中存在的不足,使得新算法在测试问题集上表现更好,本研究对算法的多样性进行改进。受 PBI 效用函数的启发,抽取其中的  $d_2$  距离作为选择机制并与传统 NSGA II 算法结合,提出一种计算  $d_2$  距离的改进型 NSGA II 算法( $d_2$ -NSGA II),用于改善传统算法的收敛性与多样性。通过实验对比发现,相比 NSGA II 以及其他一些算法,新算法在一些测试函数的高维多目标优化问题上有明显的优势。因此, $d_2$ -NSGA II 是一种较好的解决高维多目标优化问题的新算法。

**关键词:**多目标优化 非支配排序 进化算法 拥挤距离 NSGA II

中图分类号:TP181 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2021)04-0353-10

DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.20211109.006

## 0 引言

现实生活中涌现出越来越多的多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problem, MOP),但是这些目标之间通常是相互制约的,一个目标在得到改善的同时会伴随着其他目标的效果变差,故 MOP 得到的解不能同时满足全部目标最优,而是一组折衷的解,即 Pareto 解集或非劣解集<sup>[1]</sup>。基于群体搜索的进化算法(Evolutionary Algorithm, EA)是模拟生物进化过程的自组织、自适应的人工智能技术,主要通过选择、交叉、变异、重组等遗传操作求解问题,其

最大的优势就是不要求问题满足连续、可微等特定性质。基于 EA 求解 MOP 问题的优势,短短数年内涌现出大量优秀的多目标进化算法(Multi-objective Evolutionary Algorithm, MOEA)。

1985 年由 Schaffer 提出的矢量评价遗传算法 VEGA<sup>[2]</sup>是最早的进化算法。在此后的时间里,学者针对不同的优化问题提出不同的 MOEA,其中最具代表性的算法是以 Pareto 支配为基础的 MOEA,如 NSGA<sup>[3]</sup>、NSGA-2<sup>[4]</sup>、强度 Pareto 进化算法 SPEA<sup>[5]</sup>、SPEA2<sup>[6]</sup>和 PESA-II<sup>[7]</sup>等。上述算法在求解较少目标优化问题上表现出良好的性能,其中以

收稿日期:2021-05-28

\* 国家自然科学基金(61763010),广西自然科学基金(2021GXNSFAA075011)和广西研究生教育创新计划项目(YCSW2020194)资助。

## 【作者简介】

程文旗(1996-),男,硕士研究生,主要从事智能计算、多目标优化研究。

## 【\*\*通信作者】

谢承旺(1974-),男,博士,教授,硕士生导师,主要从事智能计算方面研究,E-mail:chengwangxie@m.scnu.edu.cn。

## 【引用本文】

程文旗,郭华,谢承旺,等.一种增强多样性的改进型 NSGA II 算法[J].广西科学,2021,28(4):353-362.

CHENG W Q, GUO H, XIE C W, et al. An Improved NSGA II Algorithm for Enhancing Diversity [J]. Guangxi Sciences, 2021, 28(4): 353-362.

NSGA II 最具代表性。

多目标优化问题在现实生活中的应用比比皆是, 例如: 电力供应<sup>[8]</sup>、海水淡化<sup>[9]</sup>、护士排班问题<sup>[10]</sup>、汽车控制器优化问题<sup>[11]</sup>以及疫情救灾点优化<sup>[12]</sup>等。这些实际应用问题的目标数通常是大于等于4的, 所以这些问题又被称为高维多目标优化问题(Many-objective Optimization Problem, MaOP)。MaOP 在传统的优化过程会面临很多困难, 如: ①随着目标数的增加, 种群中非支配个体所占的比例会急剧增大, 严重削弱 Pareto 选择压力; ②在目标空间中可能会出现偏远的解, 即支配抵触解(Dominance Resistance Solution, DRS)<sup>[13]</sup>; ③在高维空间中, 因为个体可能相距太远, 父代产生的子代有很大的差异, 导致后代不稳定且不具有代表性, 通常会面临杂交和变异算子失效的情况<sup>[14]</sup>; ④Pareto 前沿面表示困难。假设有  $m$  个目标的优化问题, 每个目标上有  $b$  个解, 则共需要  $mb^{m-1}$  个解表示, 这在现实应用中十分困难。MaOP 算法的提出一般基于上述几个问题, 提出针对性的解决方案。

传统的 NSGA II 算法在高维(目标数大于等于4)目标空间优化时, 算法性能急剧下降, 且算法的多样性表现较差, 不适用于现在的多目标优化问题。受 Elarabri 等<sup>[15]</sup>所提出的 RPD-NSGA II 启发, 本研究采用  $d_2$  距离来增强算法在高维空间的多样性, 提出算法  $d_2$ -NSGA II。新算法拟在保证 NSGA II 原有精英策略等优点的同时, 显著改善算法的分布性。

## 1 多目标优化问题及相关概念

统一以最小化问题为例, 将  $m$  个目标函数和  $n$  个决策变量,  $(p+q)$  个约束的 MOP 描述为

$$\begin{cases} \min y = F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \\ s. t. g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, p \\ h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, q \end{cases}, \quad (1)$$

式中  $x \in X \subset R^n$ ,  $y \in Y \subset R^m$ ,  $n$  是决策变量的个数,  $m$  是目标向量的个数,  $x$  表示决策向量,  $X$  是由决策向量  $x$  形成的决策空间;  $y$  表示目标向量,  $Y$  是由目标向量形成的目标空间;  $F(x)$  定义了由决策空间  $X$  向目标空间  $Y$  映射的函数,  $g(x)$  定义了  $p$  个不

等式约束,  $h(x)$  定义了  $q$  个不等式约束。

**定义 1** (可行解集) 满足式(1)中约束函数的决策向量的集合, 用  $X_l$  表示,  $X_l = \{x \in X | g(x) \geq 0 \wedge h(x) = 0\}$ 。

**定义 2** (Pareto 支配) 存在  $x_1, x_2 \in X_l$  是问题的解, 当满足  $\forall i \in (1, \dots, M): f_i(x_1) \leq f_i(x_2) \wedge \exists j \in (1, \dots, M): f_j(x_1) < f_j(x_2)$  时候, 称  $x_1$  Pareto 支配  $x_2$  (记为  $x_1 < x_2$ )。

**定义 3** (Pareto 最优解) 当不存在其他解  $x \in X_l$ , 使得  $x < x_l$ , 称  $x_l$  为最优解, 最优解也叫做非支配解。

**定义 4** (Pareto 最优解集) 满足定义 3 的解的集合称为 Pareto 最优解集(Pareto optimal set, PS), 表示为  $PS = \{x_l\} = \{x \in X_l | \neg \exists x' \in X_l: x' < x\}$ 。

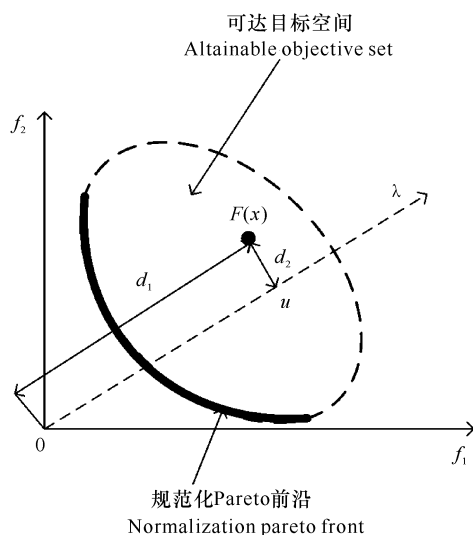
**定义 5** (Pareto 前沿) PS 在目标空间的投影叫做 Pareto 前沿(Pareto optimal front, PF), 表示为  $PF = \{F(x) \in R^m | x \in PS\}$ 。

多目标进化算法按照不同优化标准可以分为 3 类: 基于支配的 MOEA、基于指标的 MOEA 以及基于分解的 MOEA。其中, 基于支配的 MOEA 算法代表有 NSGA II 和 SPEA2, 基于分解的 MOEA 算法代表有 MOEA/D<sup>[16]</sup>、MOEA/D - URAW<sup>[17]</sup> 以及 MOEA/D-DRA<sup>[18]</sup>, 基于指标的 MOEA 算法代表有超体积评价指标(Hypervolume, HV)<sup>[19]</sup>、MOEA-HV<sup>[20]</sup> 以及基于 R2 指标的 R2-HVC<sup>[21]</sup>。在基于分解的 MOEA 算法中, Zhang 与 Li<sup>[16]</sup> 于 2007 年提出了一种优秀的 PBI 分解方法, 该方法因为可以较好地控制种群的收敛性和分布性而广受关注。PBI 在应用时需要度量两个距离  $d_1$  和  $d_2$ ,  $d_1$  代表解在参考向量方向投影距离原点的欧式距离,  $d_2$  代表解距离参考向量的欧式距离, 具体度量如图 1 所示。通过图示不难看出, 一个较小的  $d_1$  代表解距离 PF 近, 个体的收敛性更好; 同样较小的  $d_2$  代表解具有更好的多样性, 当  $d_2 = 0$  时, 意味着解在参考向量的方向上。

具体数学表示如公式(2):

$$\begin{cases} d_1(x) = \|f(x)^T \lambda\| / \|\lambda\| \\ d_2(x) = \|f(x) - d_1(x) \left( \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \right)\| \end{cases}, \quad (2)$$

其中  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$  是解  $x$  的标准目标向量, PF 是真实前沿面,  $\lambda$  是  $m$  维的方向向量。

图1  $d_1$  与  $d_2$  距离的度量Fig. 1 Measure of the distance of  $d_1$  and  $d_2$ 

## 2 基于 $d_2$ 距离的改进型 NSGA II

传统的 NSGA II 算法在保持种群多样性方面采用的是度量拥挤距离, 该方法存在一定缺陷, 即欧氏距离的度量在高维空间中不再适用<sup>[22]</sup>。个体的拥挤距离存在不能准确度量个体拥挤度的问题, 在种群迭代的时候, 该问题会导致分布性差的个体反而被保留, 进而导致种群多样性较差。如图 2 所示, 图中个体为最后非支配层的个体, 个体 B、C 的拥挤距离较大且相等, 在迭代的时候这两个个体会被保留下来。但是, 由图 2 可以看出这两个个体实际距离较为接近, 不应该全部被保留; 此时根据拥挤距离不能确定个体, 可以度量两个个体距离相应权重向量的  $d_2$  距离, 选择距离小的个体保留 (保留个体 B)。

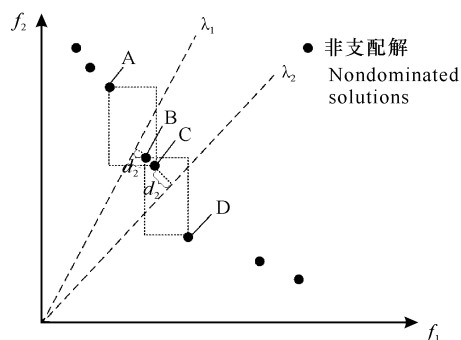


图2 种群个体分布图

Fig. 2 Distribution of population individuals  
设置对照实验, 增加统一数据集的维数, 计算出

目标空间中最近与最远个体之间的差值  $d_{\max} - d_{\min}$ , 实验参数设置如下: 目标数  $M = 30$ , 决策变量数目  $D = 30$ , 种群数  $N = 100$ , 评价次数 Evaluation = 10 000,  $p$  分别取值 2.0, 1.0, 0.5, 0.1。通过实验数据 (图 3) 可以看出, 当  $p = 2.0$  (欧氏距离) 以及  $p = 1.0$  (曼哈顿距离) 时, 在高维空间  $d_{\max}$  与  $d_{\min}$  差值不是很明显; 当  $p = 0.5$  以及  $p = 0.1$  时, 随维数的增加,  $d_{\max}$  与  $d_{\min}$  差值明显变大, 有利于在高维空间中选择分布性较好的个体保留。因此, 欧式距离降低了在高维空间中多样性的选择能力, 其在高维空间中意义不大。相反地, 其他  $p$  范式距离 ( $p < 1$ ) 在高维空间上表现更好。

Pareto 支配能更好地提高算法的收敛性, 而 PBI 效用函数的  $d_2$  距离可以提高种群的多样性分布。为将二者结合并求解高维目标优化问题, 本研究将  $d_2$  距离的度量应用到 NSGA II 框架中。同样采用 NSGA II 非支配排序的方法选择优秀个体, 保留  $F_1, F_2 \dots F_{l-1}$  非支配层个体, 删除  $F_l$  层以后的个体, 在第  $F_l$  非支配层利用个体距离相应参考向量的  $d_2$  距离, 选择出剩余优秀个体, 使得种群规模保持不变。这样在保证种群收敛性的同时, 促进种群的多样性。由此, 产生一种基于  $d_2$  距离的新算法  $d_2$ -NSGA II, 算法的示意如图 4 所示。

算法中使用的 Pareto 支配满足反自反、反对称和传递性质。

①反自反性: 种群中任一个体  $x$ , 满足反自反性, 即  $x \not< x$ 。

证明: 如果  $x < y$ , 则至少存在一个分量  $i = 1, 2, \dots, m$ ; 满足  $f_i(x) < f_i(y)$ ; 但是 Pareto 定义中不存在  $f_i(x) < f_i(y)$ , 所以  $x$  不能 Pareto 支配其本身, 即  $x$  满足反自反性。

②反对称性: 种群中任意两个个体  $x, y$  如果满足  $x < y$ , 则  $y \not< x$ 。

证明: 假设  $x < y$ , 根据定义 3, 则任意  $f_i(x), f_i(y), i = 1, 2, \dots, m$ ; 存在  $f_i(x) \leq f_i(y)$ 。所以不存在  $f_i(x) > f_i(y)$ , 故  $y$  不能 Pareto 支配  $x$ , 即  $y \not< x$ , 满足反对称性质。

③传递性:  $x, y, z$  是种群中 3 个个体, 如果  $x < y$  且  $y < z$ , 则  $x < z$ 。

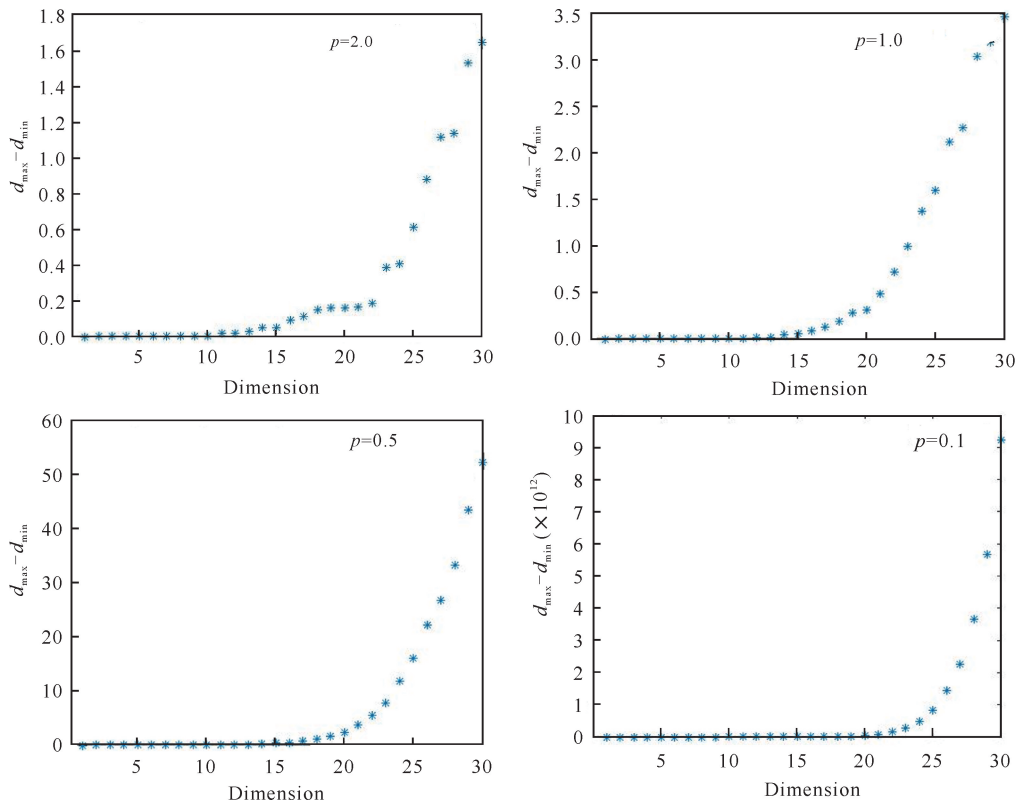


图3 不同  $p$  取值下  $d_{\max}$  与  $d_{\min}$  差值变化情况

Fig. 3 Variation between  $d_{\max}$  and  $d_{\min}$  under different values of  $p$

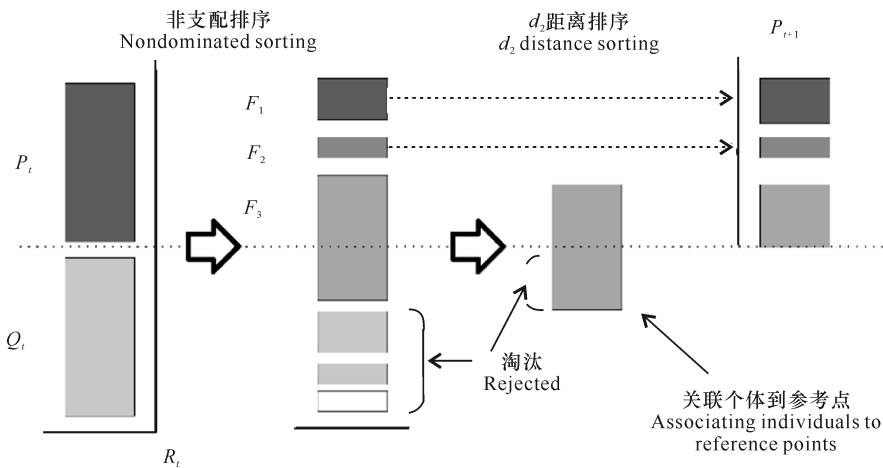


图4  $d_2$ \_NSGA II 示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the  $d_2$ \_NSGA II

**证明:** 因为  $x < y$ , 则满足  $\forall i = 1, 2, \dots, m: f_i(x) \leq f_i(y) \wedge \exists j = 1, 2, \dots, m: f_j(x) < f_j(y)$ ; 同理  $y < z$ , 满足  $\forall i = 1, 2, \dots, m: f_i(y) \leq f_i(z) \wedge \exists j = 1, 2, \dots, m: f_j(y) < f_j(z)$ , 因此对于个体  $x, z$ , 至少存在一个分量  $i = 1, 2, \dots, m: f_i(x) \leq f_i(z) \wedge \exists j = 1, 2, \dots, m: f_j(x) < f_j(z)$ , 即  $x < z$  成立, 个体满足传递性。

除非支配排序外, 文章还涉及参考点的产生。因文章算法针对高维多目标优化问题, 因此采用 Deb

和 Jain 的双层参考点产生方法, 产生两层参考点, 每层参考点数量计算公式相同, 具体如下所示:

$$C = \binom{H + M - 1}{M - 1}, \quad (3)$$

其中,  $C$  代表参考点数量,  $M$  代表目标数量,  $H$  代表超平面上沿着每个目标考虑的划分数量。

假设在一个 3 目标优化问题上, 在外层参考点上, 取  $H_1 = 2$ , 则外层参考点数目  $C_1 =$

$\binom{H_1 + M - 1}{M - 1} = 6$ ; 在内层参考点上, 取  $H_2 = 1$ , 则内

层参考点数目  $C_2 = \binom{H_2 + M - 1}{M - 1} = 3$ ; 总的参考点

数目  $C = C_1 + C_2$ , 产生参考点的过程如图 5 所示。在目标数量  $M = 3$ ,  $H_1 = 2$ ,  $H_2 = 1$ , 两层参考点共  $(6 + 3 = 9)$  个, 双层参考点的具体分布如图 5c 所示。不同目标数量  $M$ 、不同划分数量  $H$  的情况下, 参考数量多少如表 1 所示。

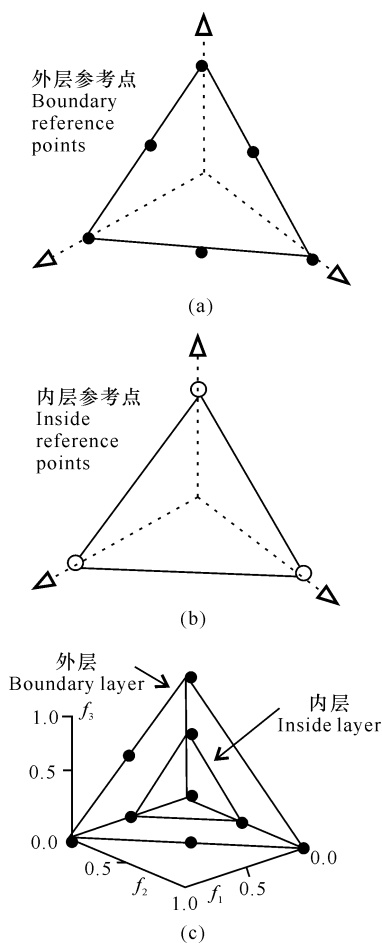


图 5 参考向量的产生以及参考点的分布

Fig. 5 Generation of reference vectors and distribution of reference points

$d_2$ \_NSGA II 具有以下特点: ①利用 NSGA II 经典框架, 保留精英策略, 同时采用非支配排序, 算法时间复杂度低; ②算法最后的非支配层采用  $d_2$  距离度量, 可以在收敛性的基础之上最大化地提高多样性。以下给出算法的具体流程。

算法:  $d_2$ \_NSGA II 算法

输入: 种群规模  $N$ , 决策变量数目  $D$ , MaOP 问题的目标数目  $M$ , 最大迭代次数  $T_{\max\text{gen}}$ , 沿目标方向划

表 1 不同目标情况下参考点数目

Table 1 Number of reference points for different reference vector

目标数目 Objectives ( $M$ )	参数设置 Parameters setting ( $H_1, H_2$ )	参考点数目 Reference points ( $C$ )
3	$H_1 = 12, H_2 = 0$	91
5	$H_1 = 6, H_2 = 0$	210
8	$H_1 = 3, H_2 = 2$	156
10	$H_1 = 3, H_2 = 2$	275
15	$H_1 = 2, H_2 = 1$	135

分  $H$  份

输出: 最末代种群  $P_{\max\text{gen}}$

1. 初始化

1.1 初始化迭代计数器  $t = 0$ ;

1.2 在 MaOP 问题的可行决策空间内随机产生  $N$  个初始点, 形成初始化种群  $P_0$ ;

1.3 计算  $P_0$  中所有解的目标值向量  $F_1(0), \dots, F_N(0)$ ;

1.4 产生参考点  $(M, H) \rightarrow \text{Set}$ ;

2. WHILE( $t < T_{\max\text{gen}}$ )

3. 构建交配池:  $P_t^{\text{mating}} = \text{Mating\_selection}(P_t)$ ;

4. 重组运算:  $P_t^{\text{recombination}} = \text{Recombination}(P_t^{\text{mating}})$ ;

5. 变异运算:  $P_t^{\text{offspring}} = \text{Mutation}(P_t^{\text{recombination}})$ ;

6. 合并子种群和父种群:  $R_t = P_t \cup Q_t$ ;

7. 计算最小向量值  $\rightarrow F_{\min}$ ;

8. 计算最大向量值  $\rightarrow F_{\max}$ ;

9. 归一化处理  $(R_t, F_{\min}, F_{\max}) \rightarrow R_t$ ;

10. 保留  $R_t$  中边界解;

11. 对  $R_t$  集中的个体进行非支配排序;

12. 确定最小的  $k$  值, 使其满足  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| \geq N$ ; //  $F_i$  表示第  $i$  层非 Pareto 支配层;

13. 计算非支配层 ( $F_k$ ) 个体的  $d_2$  距离  $d_2(F_k, \text{Set})$ ;

14. 关联  $F_k$  中个体与 Set 集中的点;

15. IF  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| > N$  THEN

16. 根据距离从非 Pareto 支配层  $F_k$  中删除  $(|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| - N)$  个具有较大  $d_2$  距离的个体;

17. END IF

18.  $P_{t+1} = |F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k|$ ; // 获得规模为  $N$  的下一代种群;

19. 更新迭代计数器  $t = t + 1$ ;

20. END WHILE.

21. 输出最末代种群  $P_{\max\text{gen}}$ .

算法的第1步为初始化,随机产生个体,并计算其目标值大小,同时产生参考点;第2步进入循环,进行重组变异,产生新的后代;第3步 Mating\_selection 利用二元竞标赛法选取优秀的  $N/2$  个体;第4步对交配池中的个体进行仿二进制交叉(SBX),得到规模为  $N$  的种群  $P_t^{\text{recombination}}$ ;第5步执行变异操作,得到后代  $Q_t$ , 规模为  $N$ 。然后进行父种群以及子代种群的合并,生成规模为  $2N$  的新种群。为了便于目标值的比较,对目标值进行归一化处理。

归一化的目的是为了消除个体极端目标值,将数据标准化,便于比较,使实验数据更加可靠真实。首先,确定种群中个体每个目标分量  $f_i$  的最小值  $f_i^{\min}$ , 构造向量  $F^{\min} = (f_1^{\min}, f_2^{\min}, \dots, f_M^{\min})^T$ , 同样构造目标最大值的向量  $F^{\max} = (f_1^{\max}, f_2^{\max}, \dots, f_M^{\max})^T$ , 其中  $f_i^{\max}$  是种群  $R_t$  中  $f_i$  的最大值。然后将  $R_t$  中所有个体目标值归一化,具体归一化公式如下所示:

$$\bar{f}_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \quad (4)$$

算法第13步通过公式(2)计算  $F_k$  层个体距离参考向量的  $d_2$  距离,找到距离个体最近的参考向量进行关联。如图6所示,度量个体 a、b、c、e 所有权重向量的  $d_2$  距离,不难发现,个体 b 距离参考向量  $\lambda_1$  最近,个体 c 距离参考向量  $\lambda_2$  最近,将  $F_k$  层个体与相应权重向量关联。算法中,先进性非支配排序获得若干非支配层后,再对  $F_k$  非支配个体进行关联参考点,这样可以避免计算所有个体的  $d_2$  距离,减少计算复杂度。

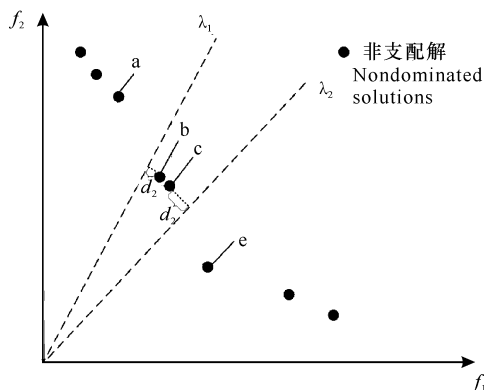


图6 个体关联参考点

Fig. 6 Individuals associated with reference points

同时,保留目标空间中的边界值,将在每个目标上的最大值与最小值的个体保留下来(边界值)。将边界个体的  $d_2$  值设置为 0,在迭代的时候将  $d_2$  值为

0 的个体保留下来。与 NSAG II 同样地进行非支配排序,确定最后的非支配层使得种群规模保持  $N$ ,并在最后非支配层根据  $d_2$  值由小到大筛选优秀的个体,使种群的规模保持为  $N$ ,进入下一代迭代。

$d_2$ \_NSGA II 的时间复杂度主要由两部分组成:非支配排序、 $d_2$  距离度量。假设 MOP 有  $M$  个目标,种群规模  $N$ 。非支配排序中,种群中所有个体之间相互比较,确定所有个体计数  $S_q$  (被个体  $q$  支配的个体数目) 和个体  $q$  支配的个体数目  $n_q$ ,需要两两个体比较,时间复杂度为  $O(MN^2)$ 。在找到第一非支配层个体后,剩余个体的  $n_q$  计数最多为  $N-1$ ,故剩余个体最多需要遍历  $(N-1)$  次才会找到所在非支配层。因为除去第一非支配层之外最多剩余个体为  $(N-1)$ ,故此过程时间复杂度为  $O(N^2)$ 。因此,非支配排序的时间复杂度为  $O(MN^2)$ 。在最差情况下,即第一非支配层即为最后非支配层,需度量所有个体距离参考向量的距离,时间复杂度为  $O(N^2)$ 。综上两部分时间复杂度比较,取最高次幂,故  $d_2$ \_NSGA II 的时间复杂度为  $O(MN^2)$ 。

### 3 测试实验与数据分析

为验证所提出的  $d_2$ \_NSGA II 算法的有效性,采用 3 组对比算法在 DTLZ 系列测试函数上进行实验数据的对照以及分析,所采用的算法依次是 NSGA II、NSGA、VaEA<sup>[23]</sup>、MOEAD 以及 MOEADF-FRMAB<sup>[24]</sup>。

#### 3.1 测试问题

研究采用的是 DTLZ 系列测试函数,具体为 DTLZ1 - DTLZ7。DTLZ 测试函数的前沿面具有多样性,具备不同的特征,可以从多个角度检验算法在高维多目标情况下优化问题的能力,而且采用的测试函数在目标空间和决策空间上均具有可扩展性。DTLZ 系列测试函数的具体特征描述如表 2 所示。

#### 3.2 性能指标

采用 IGD 指标测试新算法的性能。该指标反映了真实的 Pareto 前沿到近似 Pareto 前沿之间的距离,可以综合度量算法的收敛性与多样性。IGD 指标具体工作机制如下:在真实的 Pareto 前沿上采用一组分布较为均匀的点,并计算他们到近似 Pareto 解之间的距离。IGD 指标的值越小表明算法收敛性与多样性越好。具体的计算公式如下:

表 2 测试函数特征

Table 2 Characteristics of the test function

测试问题 Test problems	特征描述 Characteristics description
DTLZ1	线性、多模态 Linear, multimodal
DTLZ2	凹型 Concave
DTLZ3	凹型、多模态 Concave, multimodal
DTLZ4	凹型、有偏 Concave, biased
DTLZ5	连续均匀曲线 Continuous uniform curve
DTLZ6	连续均匀曲线 Continuous uniform curve
DTLZ7	不连续、多模态、比例缩放 Discontinuous, multimodal, proportional scaling

$$IGD = \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} \text{Dist}_i, \quad (5)$$

$$\text{Dist}_i = \min_{j=1}^{|A|} \sqrt{\sum_{m=1}^M \left( \frac{f_m(p_i) - f_m(a_j)}{f_m^{\max} - f_m^{\min}} \right)^2}, \quad (6)$$

上述公式中,  $P$  是 MOP 问题的解集;  $\text{Dist}_i$  是目标函数归一化处理之后的最小欧氏距离;  $f_m^{\max}$  和  $f_m^{\min}$  分别表示  $P$  在第  $m$  个目标上获得的最大值与最小值。  $A$  为近似 Pareto 前沿,  $p_i \in P, i=1, 2, \dots, |P|$ ;  $a_j \in A, j=1, 2, \dots, |A|$ 。在对比实验中, 实验进行 30 次, 取结果平均值作为最后的实验结果; 同时利用显著水平为 0.05 的 Wilcoxon 秩和检验分析所有对比算法结果的差异。

### 3.3 实验结果与分析

实验对比了 6 种算法在 DTLZ6 测试函数上, 目标数为 8 的 IGD 值变化情况(图 7)。从图 7 可以看出, 随着评估次数的增大, 6 种算法的 IGD 值整体在变小。评估次数在 3 000 之前,  $d_2$ -NSGA II 的下降速度远远大于 NSGA II、VaEA、NSGA III, 但是稍微小于 MOEAD 和 MOEADFRRMAB; 评估次数在 3 000 之后,  $d_2$ -NSGA II 的下降速度仅仅略逊色于 MOEADFRRMAB, 但是远远超过其他 4 种算法。

表 3 6 种算法在 DTLZ 测试函数上的 IGD 值

Table 3 IGD values of 6 algorithms on the DTLZ test function

Problem	$M$	$d_2$ -NSGA II	MOEAD	MOEADFRRMAB	VaEA	NSGA III	NSGA II
DTLZ1	3	5.3733e+ 1(1.16e+1)	<b>4.9855e+</b> <b>1(1.31e+1) =</b>	5.0322e+ 1(3.47e+1) =	8.2390e+ 1(1.51e+1) ↓	8.2733e+ 1(1.57e+1) ↓	5.4695e+ 1(1.26e+1) =
	5	8.1375e+ 1(1.59e+1)	<b>3.8626e+</b> <b>1(9.89e+0) ↑</b>	5.6873e+ 1(3.87e+1) ↑	1.0865e+ 2(1.92e+1) ↓	9.9737e+ 1(1.56e+1) ↓	3.0365e+ 2(6.05e+1) ↓
	8	<b>2.0815e+</b> <b>1(5.33e+0)</b>	6.6281e+ 1(2.19e+1) ↓	3.9894e+ 1(3.85e+1) ↓	1.2781e+ 2(2.23e+1) ↓	6.3370e+ 1(1.48e+1) ↓	5.4696e+ 2(6.75e+1) ↓

图 7 算法的 IGD 变化情况印证了  $d_2$ -NSGA II 算法在算法多样性与收敛性方面的效果。

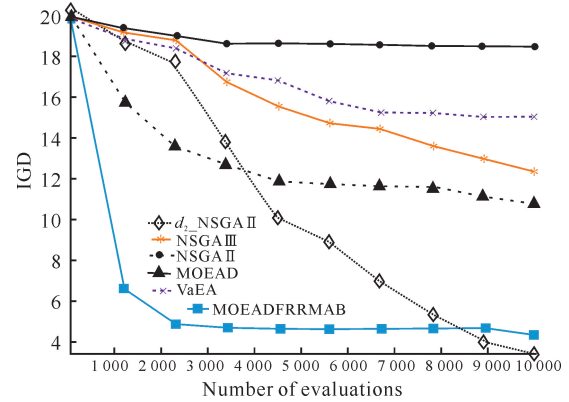


图 7 6 种算法在 DTLZ6 测试函数上(目标数为 8)的 IGD 值变化

Fig. 7 Change of IGD values of 6 algorithms on DTLZ6 test function (target number 8)

表 3 给出  $d_2$ -NSGA II 与 NSGA II、NSGA III、VaEA、MOEAD、MOEADFRRMAB 6 种算法在测试函数上的 IGD 值, 以及他们的优劣对比, 表现优秀的 IGD 值用加粗字体标注。将目标数分别设置为 3, 5, 8, 10 (表 3), 在 28 组测试函数中,  $d_2$ -NSGA II 共取得 7 个最佳 IGD 值, NSGA II 共获得 1 个最佳 IGD 值, VaEA 取得 1 个最佳值, NSGA III 共取得 4 个最佳 IGD 值, MOEAD 共取得 11 个最佳 IGD 值, MOEADFRRMAB 取得 4 个最佳 IGD 值。从表中的 Wilcoxon 秩和检验结果看, 相比于 MOEAD、MOEADFRRMAB、VaEA、NSGA III、NSGA II,  $d_2$ -NSGA II 净胜得分(数据优于对比算法的个数减去差于对比算法的个数)为 -2, 0, 6, 1, 16。由此可见, 除算法性能稍微劣于 MOEAD、MOEADFRRMAB,  $d_2$ -NSGA II 均优于其他几种算法, 故认为  $d_2$ -NSGA II 算法在求解 DTLZ 系列测试函数具有较为优秀的性能。

续表 3

Continued table 3

Problem	M	$d_2$ _NSGA II	MOEAD	MOEADFRMAB	VaEA	NSGA III	NSGA II
DTLZ2	10	5.6325e+ 1(1.99e+1)	<b>1.3428e+</b> <b>1(4.82e+0) ↑</b>	3.4889e+ 1(2.42e+1) ↑	1.0247e+ 2(1.62e+1) ↓	5.6127e+ 1(1.26e+1) =	4.9799e+ 2(7.61e+1) ↓
	3	1.5199e- 1(1.79e-2)	6.4252e- 2(3.31e-3) ↑	2.8685e- 1(4.90e-2) ↓	6.4185e- 2(2.48e-3) ↑	<b>6.2138e-</b> <b>2(1.63e-3) ↑</b>	7.8172e- 2(2.79e-3) ↑
	5	2.5974e- 1(1.35e-2)	<b>2.2182e-</b> <b>1(4.00e-3) =</b>	7.6490e- 1(5.90e-2) ↓	7.4503e- 1(8.33e-2) ↓	2.4910e- 1(7.98e-3) ↑	7.7339e- 1(1.70e-1) ↓
	8	1.0228e+ 0(8.50e-2)	<b>3.9734e-</b> <b>1(7.87e-3) ↑</b>	9.4599e- 1(5.81e-2) ↑	6.5144e- 1(6.18e-2) ↑	4.7902e- 1(6.88e-2) ↑	2.5330e+ 0(4.52e-1) ↓
DTLZ3	10	1.0016e+ 0(8.95e-2)	<b>6.0248e-</b> <b>1(6.29e-2) ↑</b>	1.0263e+ 0(6.36e-2) =	7.9870e- 1(6.52e-2) ↑	6.3599e- 1(5.00e-2) ↑	2.3655e+ 0(3.07e-1) ↓
	3	<b>1.3251e+</b> <b>2(2.77e+1)</b>	1.6589e+ 2(3.92e+1) ↓	1.8165e+ 2(1.25e+2) =	2.0105e+ 2(3.47e+1) ↓	2.2824e+ 2(3.80e+1) ↓	1.3364e+ 2(3.39e+1) =
	5	2.7516e+ 2(5.13e+1)	1.5275e+ 2(2.89e+1) ↑	<b>1.4727e+</b> <b>2(1.13e+2) ↑</b>	3.3270e+ 2(5.69e+1) ↓	2.8932e+ 2(4.62e+1) =	8.2180e+ 2(1.31e+2) ↓
	8	<b>1.0467e+</b> <b>2(3.92e+1)</b>	1.2567e+ 2(2.90e+1) ↓	1.2406e+ 2(1.01e+2) ↓	5.0577e+ 2(7.52e+1) ↓	2.4656e+ 2(4.47e+1) ↓	2.3636e+ 3(2.51e+2) ↓
DTLZ4	10	<b>6.5087e+</b> <b>1(2.50e+1)</b>	7.6939e+ 1(2.00e+1) ↓	8.5980e+ 1(7.53e+1) ↓	4.2819e+ 2(5.86e+1) ↓	2.2353e+ 2(5.86e+1) ↓	2.1303e+ 3(3.39e+2) ↓
	3	<b>1.6098e-</b> <b>1(1.94e-1)</b>	4.9974e- 1(3.92e-1) ↓	5.2833e- 1(1.96e-1) ↓	4.7682e- 1(1.70e-1) ↓	2.4773e- 1(3.05e-1) ↓	3.5211e-1 (2.80e-1) ↓
	5	<b>2.8046e-</b> <b>1(2.03e-2)</b>	7.5770e- 1(2.57e-1) ↓	7.5919e- 1(1.19e-1) ↓	7.4473e- 1(6.18e-2) ↓	3.5523e- 1(1.15e-1) ↓	5.7664e- 1(1.11e-1) ↓
	8	6.5776e- 1(5.05e-2)	8.9577e- 1(1.92e-1) ↓	9.1988e- 1(5.32e-2) ↓	9.2083e- 1(7.70e-2) ↓	<b>5.7650e-</b> <b>1(7.52e-2) ↑</b>	2.4329e+ 0(3.60e-1) ↓
DTLZ5	10	1.0426e+ 0(7.11e-2)	1.0436e+ 0(1.78e-1) =	9.7840e- 1(4.36e-2) ↑	8.0668e- 1(3.88e-2) ↑	<b>6.5001e-</b> <b>1(6.11e-2) ↑</b>	2.1652e+ 0(1.72e-1) ↓
	3	6.9697e- 2(6.77e-3)	2.9184e- 2(1.60e-3) ↑	1.0675e- 1(4.18e-2) ↓	1.8283e- 2(3.67e-3) ↑	1.9973e- 2(2.51e-3) ↑	<b>1.2514e-</b> <b>2(2.03e-3) ↑</b>
	5	6.5578e- 1(1.37e-1)	<b>2.4457e-</b> <b>2(2.86e-3) ↑</b>	2.1652e- 1(6.51e-2) ↑	3.2050e- 1(4.10e-2) ↑	3.1531e- 1(5.24e-2) ↑	9.6093e- 1(1.95e-1) ↓
	8	2.9246e- 1(5.35e-2)	<b>6.2137e-</b> <b>2(1.49e-2) ↑</b>	4.0029e- 1(7.95e-2) ↓	6.7726e- 1(1.23e-1) ↓	6.2208e- 1(1.17e-1) ↓	1.5987e+ 0(3.37e-1) ↓
DTLZ6	10	6.1807e- 1(1.36e-1)	<b>7.9997e-</b> <b>2(1.12e-2) ↑</b>	2.5732e- 1(4.67e-2) ↑	7.0154e- 1(1.75e-1) =	3.3652e- 1(4.80e-2) ↑	1.7129e+ 0(3.55e-1) ↓
	3	4.7408e+ 0(1.34e+0)	8.2580e+ 0(1.77e+0) ↓	<b>1.5862e-</b> <b>1(4.37e-1) ↑</b>	3.6819e+ 0(8.65e-1) ↑	4.2542e+ 0(1.02e+0) =	4.4193e+ 0(1.35e+0) =
	5	7.4818e+ 0(1.36e+0)	1.0129e+ 1(1.59e+0) ↓	<b>1.5845e+</b> <b>0(1.75e+0) ↑</b>	1.5943e+ 1(1.05e+0) ↓	1.3469e+ 1(8.84e-1) ↓	1.9596e+ 1(8.82e-1) ↓
	8	<b>1.2460e+</b> <b>0(7.35e-1)</b>	8.3860e+ 0(1.80e+0) ↓	5.7767e+ 0(1.50e+0) ↓	1.4326e+ 1(9.03e-1) ↓	1.3569e+ 1(1.02e+0) ↓	1.8562e+ 1(8.06e-1) ↓
DTLZ7	10	3.9380e+ 0(1.12e+0)	4.7311e+ 0(1.85e+0) =	<b>4.3927e-</b> <b>1(5.07e-1) ↑</b>	1.2974e+ 1(7.75e-1) ↓	1.2650e+ 1(9.26e-1) ↓	1.7336e+ 1(6.57e-1) ↓
	3	1.5616e- 1(4.04e-2)	1.4396e- 1(1.86e-2) ↑	5.7350e- 1(9.75e-2) ↓	<b>1.2356e-</b> <b>1(2.05e-2) =</b>	4.7374e- 1(1.16e-1) ↓	1.3477e- 1(2.01e-2) =
	5	1.0672e+ 0(2.01e-1)	2.7553e+ 0(1.56e-1) ↓	1.0383e+ 0(1.67e-1) =	5.9338e- 1(6.94e-2) ↑	<b>5.8097e-</b> <b>1(1.07e-1) ↑</b>	8.6364e- 1(8.80e-2) ↑
	8	1.9351e+ 1(2.47e+0)	<b>1.5686e+</b> <b>0(2.13e-1) ↑</b>	2.8765e+ 0(1.38e+0) ↑	1.6587e+ 0(2.00e-1) ↑	4.2727e+ 0(1.14e+0) ↑	7.0155e+ 0(1.90e+0) ↑
10	1.2169e+ 1(2.54e+0)	<b>2.0851e+</b> <b>0(3.40e-1) ↑</b>	2.1327e+ 0(1.41e+0) ↑	2.3289e+ 0(3.72e-1) ↑	4.6105e+ 0(1.03e+0) ↑	2.4191e+ 1(3.03e+0) ↓	
		↑/↓/=	13/11/4	12/12/4	10/16/2	12/13/3	4/20/4

注：“↑”“↓”和“=”分别表示该结果显著地优于、劣于和统计上无差别于  $d_2$ \_NSGA II 算法Note: "↑", "↓", and "=" indicate that the result is significantly better, worse and similar to that obtained by  $d_2$ \_NSGA II algorithm



## 4 结论

为解决 NSGA II 在高维空间中效果不佳的问题,研究提出基于  $d_2$  距离的 NSGA II 算法,在保证算法收敛性的同时增加其多样性。通过实验数据验证,该算法在 MaOP 上取得了不错的效果,但是随着目标数目的增加,算法性能下降。究其原因,随着目标数目的增加,个体之间变得相互非支配,这是传统非支配方法面临的统一问题。未来可从支配关系以及距离度量方面进一步改进与探索,同时可以设计一些更加复杂的 MaOP 问题检验算法的有效性,使其效果更加优秀。

### 参考文献

- [1] 公茂果,焦李成,杨咚咚,等. 进化多目标优化算法研究[J]. 软件学报,2009,20(2):271-289.
- [2] SCHAFFER J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms [C]// GREFENSTETTE J J. Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms, Pittsburgh, PA, USA, July 1985. Hillsdale:Lawrence Erlbaum Associates Publishers,1985:93-100.
- [3] SRINIVAS N,DEB K. Muultiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms [J]. Evolutionary Computation,1994,2(3):221-248.
- [4] DEB K. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-2 [J]. IEEE Transactuons on Evolutuinary Computation, 2002,6(2):182-197.
- [5] ZITZLER E. Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: Methods and applications [M]. Zurich: Doctoral Dissertation ETH 13398,Swiss Federal Institute of Technology (ETH),1999.
- [6] ZITZLER E, LAUMANNNS M, THIELE L. SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization [C]//Evolutionary Methods for Design,Optimization and Control with Applications to Industrial Problems. Proceedings of the EUROGEN'2001,2001.
- [7] CORNE D W, JERRAM N R, KNOWLES J D, et al. PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization [C]// SPECTOR L, GOODMAN E D, WU A, et al. GECCO'01: Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. San Francisco California: Morgan Kaufmann Publishers Inc. ,2001:283-290.
- [8] 史晨豪,唐忠,戴尉阳,等. 基于多要素改进 NSGA II 算法的有源配电网多目标优化策略[J]. 供用电,2021,38(6):50-55.
- [9] 周士鹤,冯寅,张克冲,等. 基于 NSGA-II 的多效蒸发海水淡化系统优化研究[J]. 热科学与技术,2021,20(2):112-121.
- [10] SÜLFLOW A,DRECHSLER N,DRECHSLER R. Robust multi-objective optimization in high dimensional spaces [C]//OBAYASHI S,DEB K,POLONI C, et al. EMO'07: Proceedings of the 4th International Conference on Evolutionary Multi-criterion Optimization. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag,2007:715-726.
- [11] NARUKAWA K,RODEMANN T. Examining the performance of evolutionary many-objective optimization algorithms on a real-world application [C]//ICGEC'12: Proceedings of the 2012 Sixth International Conference on Genetic and Evolutionary Computing. IEEE Computer Society: Washington D C,2012:316-319.
- [12] 王付宇,汤涛,李艳,等. 疫情事件下多灾点应急资源最优化配置研究[J]. 复杂系统与复杂性科学,2021,18(1):53-62.
- [13] TIAN Y,WANG H,ZHANG X, et al. Effectiveness and efficiency of non-dominated sorting for evolutionary multi-and many-objective optimization [J]. Complex & Intelligent Systems,2017,3(4):247-263.
- [14] DEB K,JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based non-dominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2014,18(4):577-601. DOI: 10.1109/TEVC. 2013. 2281535.
- [15] ELARBI M,BECHIKH S,GUPTA A, et al. A new decomposition-based NSGA II for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(7): 1191 - 1210. DOI:10.1109/TSMC. 2017. 2654301.
- [16] ZHANG Q, LI H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6):712-731.
- [17] FARIAS L, ARAÚJOL A F R. Many-objective evolutionary algorithm based on decomposition with random and adaptive weights [C]//2019 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC). IEEE, 2019: 3746 - 3751. DOI: 10.1109/SMC. 2019. 8914005.
- [18] DONG M G, LIU B, JING C. A many-objective evolu-

- tionary algorithm based on decomposition with dynamic resource allocation for irregular optimization [J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2020, 21(8): 1171-1190.
- [19] ZITZLER E, THIELE L. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271. DOI: 10. 1109/4235. 797969.
- [20] 王学武, 魏建斌, 周昕, 等. 一种基于超体积指标的多目标进化算法[J]. *华东理工大学学报: 自然科学版*, 2020, 46(6): 780-791.
- [21] SHANG K, ISHIBUCHI H, NI X. R2-based hypervolume contribution approximation [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(1): 185-192. DOI: 10. 1109/TEVC. 2019. 2909271.
- [22] 谢承旺, 李凯, 廖国勇. 一种带差分局部搜索的改进型 NSGA2 算法[J]. *计算机科学*, 2013, 40(10): 235-238, 273.
- [23] XIANG Y, ZHOU Y, LI M, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131-152. DOI: 10. 1109/TEVC. 2016. 2587808.
- [24] LI K, FIALHOÁ, KWONG S, et al. Adaptive operator selection with bandits for a multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(1): 114-130. DOI: 10. 1109/TEVC. 2013. 2239648.

## An Improved NSGA II Algorithm for Enhancing Diversity

CHENG Wenqi<sup>1</sup>, GUO Hua<sup>1</sup>, XIE Chengwang<sup>1,2</sup>, WEI Wei<sup>1</sup>, PAN Jiamin<sup>1</sup>, LONG Guanglin<sup>1</sup>

(1. School of Computer and Information Engineering, Nanning Normal University, Nanning, Guangxi, 530000, China; 2. School of Data Science & Engineering, South China Normal University, Shanwei, Guangdong, 516600, China)

**Abstract:** The traditional NSGA II algorithm maintains the population distribution by calculating the crowding distance of individuals. In order to improve the shortcomings of the algorithm and make the new algorithm perform better on the test problem set, the diversity of the algorithm is improved in this study. Inspired by the PBI utility function, the  $d_2$  distance is extracted as the selection mechanism and combined with the traditional NSGA II algorithm. An improved NSGA II algorithm for calculating  $d_2$  distance ( $d_2$ \_NSGA II) is proposed to improve the convergence and diversity of traditional algorithms. Through experimental comparison, it is found that compared with NSGA II and other algorithms, the new algorithm has obvious advantages in high-dimensional multi-objective optimization problems for some test functions. Therefore,  $d_2$ \_NSGA II is a better new algorithm to solve high-dimensional multi-objective optimization problems.

**Key words:** multi-objective optimization, non-dominated sort, evolutionary algorithm, crowding distance, NSGA II

责任编辑:米慧芝



微信公众号投稿更便捷

联系电话:0771-2503923

邮箱:gxxk@gxas.cn

投稿系统网址: <http://gxxk.ijournal.cn/gxxk/ch>