

## ◆算法研究与应用◆

## 基于方差最小化的直觉模糊语言多属性决策方法\*

陈晶<sup>1\*\*</sup>,王中兴<sup>2</sup>,姚陈<sup>3</sup>

(1.湖南交通工程学院电气与信息工程学院,湖南衡阳 421001;2.广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004;3.南华大学化学化工学院,湖南衡阳 421001)

**摘要:**针对语言型决策存在运算越界和不符合人们直觉等问题,采用直觉模糊语言距离测度,构建个体评价信息与集成结果之间的方差最小化模型,并通过求解该模型给出直觉模糊语言运算新方法,通过给出直觉模糊语言期望值、精确值和直觉模糊语言的序关系,进而给出一种属性权重已知或完全未知且属性值为直觉模糊语言的多属性决策方法。最后,将所获得的决策方法应用于具体的数值实例中,对比现有方法以验证其合理性与有效性。数值实例结果显示,所提方法在一定程度上克服了现有语言运算存在的越界以及不符合人们直觉的不足。

**关键词:**多属性决策 不确定性 直觉模糊语言集 距离测度 方差最小化

中图分类号:C934 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2021)02-0145-07

DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.20210609.003

## 0 引言

自1998年Delgado等<sup>[1]</sup>提出用模糊语言表示评价结果以来,语言型决策理论与方法已引起国内外学者的广泛关注。Herrera等<sup>[2]</sup>为处理离散的模糊语言在集成时出现信息失真的问题,提出了模糊语言的二元语义分析法。王欣荣和樊治平<sup>[3]</sup>将二元语义引入传统TOPSIS中,提出基于二元语义信息处理的TOPSIS模糊语言决策方法。王晓等<sup>[4]</sup>针对属性权重完全未知的模糊语言多属性群决策问题,提出一种基于离差最大化的属性权重客观赋权方法。刘勇

等<sup>[5]</sup>提出一种以多阶段群体评价差异最小化为目标的模糊语言群决策模型。Bapi等<sup>[6]</sup>针对属性信息相互关联的模糊语言多属性决策问题,提出一类二元语义分区Bonferroni加权平均算子,并研究算子的相关性性质。王中兴等<sup>[7]</sup>扩展Archimedean S模,给出对属性权重进行自适应调整的二元语义扩展Archimedean S模集成算子,并将其应用于模糊语言多属性决策。Liang等<sup>[8]</sup>基于多粒度区间二元语义广义距离测度,给出一种处理区间二元语义信息的交互式多准则(TODIM)群决策方法。黄鲁成等<sup>[9]</sup>将集对分析思想引入TOPSIS中,运用联系向量的垂面距离,构建

\*国家自然科学基金项目(51803088)和湖南省教育厅科学研究项目(17C1360,19C0692)资助。

## 【作者简介】

陈晶(1990-),男,讲师,主要从事优化决策与管理研究,E-mail:1020227166@qq.com。

## 【\*\*通信作者】

## 【引用本文】

陈晶,王中兴,姚陈.基于方差最小化的直觉模糊语言多属性决策方法[J].广西科学,2021,28(2):145-151.

CHEN J,WANG Z X,YAO C. Multiple Attribute Decision-making Method of Intuitionistic Fuzzy Language Based on Variance Minimization [J]. Guangxi Sciences,2021,28(2):145-151.

VASP-TOPSIS 多属性决策模型。Song 和 Li<sup>[10]</sup> 给出求解决策方案优先权重的目标规划模型及群体一致度的自动迭代算法, 并将两者应用于多粒度二元语义群决策。

然而, 模糊语言仅考虑准则隶属度, 不能直观地表达人们思维的犹豫、模糊特征。如对汽车配置测评时, 经检测汽车在许多方面都达到“优”的标准, 但也存在一些方面未达到“优”的标准; 此时, 采用“优”“良”等模糊语言评价均不符合实际。为克服模糊语言存在的这种不足, 文献[11, 12]将直觉模糊集的思想引入模糊语言集, 先后定义了直觉模糊语言、直觉模糊二元语义, 以准确地描述准则隶属度或非隶属度两方面评价。如上述对汽车配置的测评, 可用直觉模糊语言<很高, 稍低>细腻表达, 其意义为该汽车配置达到优的标准“很高”, 而未达优的标准“稍低”。相对于模糊语言, 直觉模糊语言增加了准则非隶属度描述, 能更全面、细致、真实地描述决策者的偏好信息, 广泛适合于军事系统效能评估、供应商评估与选择、人力资源管理实际决策问题。

在研究语言型决策问题时, 往往需要对语言型评价信息进行运算或集成。直觉模糊语言的提出改进了模糊语言缺少准则非隶属度描述的局限, 使得评价结果更符合人们的直觉, 但仍未能避免模糊语言运算<sup>[1, 2, 7, 13]</sup>不满足封闭性的不足。为此, 本文采用方差最小化模型定义克服越界现象的直觉模糊语言运算新方法, 并对其进行详细讨论, 以及给出直觉模糊语言期望值、精确值的定义, 通过比较期望值和精确值给出直觉模糊语言序关系。最后, 将所提方法应用于直觉模糊语言多属性决策中, 为解决语言型决策问题提供新方法。

## 1 预备知识

模糊语言集  $L = \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_{2\tau}\}$  ( $\tau$  为正整数) 是一个非空离散的集合。模糊语言  $l_i$  是预先定义好的评价短语, 如“好”“一般”“差”等。其中  $l_0, l_{2\tau}$  分别为模糊语言集的下界与上界。  $2\tau + 1$  为模糊语言集的粒度。例如, 一个七粒度模糊语言集可表示为  $L = \{l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} = \{\text{很差}, \text{差}, \text{较差}, \text{一般}, \text{较好}, \text{好}, \text{很好}\}$ 。模糊语言集  $L$  通常有如下定义<sup>[1, 2]</sup>:

① 有序性:  $i < j$ , 则  $l_i < l_j$ 。

② 语言取小( $\wedge$ )、取大( $\vee$ )运算: 若  $l_i < l_j$ , 则  $l_i \wedge l_j = l_i, l_i \vee l_j = l_j$ 。

③ 语言否定( $\neg$ )运算:  $\neg l_i = l_j, j = 2\tau - i$ 。

对于离散的模糊语言集  $L = \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_{2\tau}\}$ , 为尽量减少决策信息的丢失, 戴跃强等<sup>[14]</sup>扩展  $L$  为连续的集合  $\bar{L} = \{l_\kappa \mid \kappa \in [0, 2\tau]\}$ , 扩展集  $\bar{L}$  仍然满足上述定义。

**定义 1**<sup>[1, 2, 13]</sup> 任意给定模糊语言  $l_\alpha, l_\beta \in \bar{L}$  与实数  $\lambda \geq 0$ , 运算法则为

$$\textcircled{1} l_\alpha \oplus l_\beta = l_{\alpha+\beta}; \textcircled{2} \lambda \otimes l_\alpha = l_{\lambda\alpha}.$$

直觉模糊语言<sup>[11-13]</sup>则是指采用模糊语言二元组  $\langle l_\mu, l_\nu \rangle$  的形式来表达决策者的偏好信息, 其中模糊语言  $l_\mu, l_\nu \in \bar{L}$ , 分别表示准则隶属度和非隶属度,  $l_\mu, l_\nu$  满足条件  $\mu + \nu \in [0, 2\tau]$ 。  $l_\gamma = \neg l_{\mu+\nu}$  表示犹豫度, 也称为直觉模糊语言的模糊指数。

特别的, 对于直觉模糊语言  $\langle l_\mu, l_\nu \rangle$ , 若  $\neg l_\mu = l_{2\tau-\mu} = l_\nu$ , 则直觉模糊语言退化为模糊语言。

为书写方便, 记  $\bar{L}$  集上全体直觉模糊语言构成的集合为

$$H = \{\langle l_\mu, l_\nu \rangle \mid l_\mu, l_\nu \in \bar{L}, \mu + \nu \in [0, 2\tau]\}. \quad (1)$$

直觉模糊语言关于定义 1 中的运算法则存在以下问题: 例如, 对于上述七粒度模糊语言集  $L$ , 若取直觉模糊语言  $h_1 = \langle l_2, l_0 \rangle, h_2 = \langle l_6, l_0 \rangle \in H$ , 则由文献[1, 2, 13]中方法有  $h_1 \oplus h_2 = \langle l_4, l_0 \rangle$ , 即“较差”与“较差”运算结果为“较好”, 这让人不易接受; 又如  $h_1 \oplus h_2 = \langle l_8, l_0 \rangle$  ( $l_8 \notin L$ ), 即“较差”与“很好”运算结果可能不在模糊语言集中, 出现越界的现象。

**定义 2**<sup>[11]</sup> 设  $H$  为直觉模糊语言集,  $h_1 = \langle l_{\mu_1}, l_{\nu_1} \rangle, h_2 = \langle l_{\mu_2}, l_{\nu_2} \rangle$  为  $H$  中的直觉模糊语言, 则  $h_1$  与  $h_2$  的距离为

$$d(h_1, h_2) = \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\nu_1 - \nu_2)^2}. \quad (2)$$

## 2 直觉模糊语言决策理论与方法

### 2.1 直觉模糊语言运算新方法

在实际的决策问题中, 决策专家针对评价对象各评价指标所给出的评价往往存在差异。为得到评价对象的综合评价, 需要对各指标的评价信息进行运算或集成。考虑到综合评价作为决策专家对评价对象意见的综合反映, 其与各指标评价之间的方差应尽可能小。基于此思想, 下面给出直觉模糊语言方差的定义。

**定义 3** 设  $h_j = \langle l_{\mu_j}, l_{\nu_j} \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为

$H$  中的一组直觉模糊语言,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  为其对应的权重向量, 满足  $w_j \in [0, 1]$  且  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ , 则直觉模糊语言方差(Var)定义为

$$\text{Var}(h_e) = \sum_{j=1}^n w_j d^2(h_j, h_e). \quad (3)$$

其中, 直觉模糊语言  $h_e = \langle l_{\mu_e}, l_{\nu_e} \rangle \in H$  为直觉模糊语言  $h_j (j=1, 2, \dots, n)$  的集成结果。

而对于权重信息完全未知的情形, 方差(Var)可定义为

$$\text{Var}(h_e) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} d^2(h_j, h_e).$$

设  $h_j = \langle l_{\mu_j}, l_{\nu_j} \rangle (j=1, 2, \dots, n)$  为决策者关于第  $j (j=1, 2, \dots, n)$  个评价指标所给出的评价, 则综合评价  $h_e = \langle l_{\mu_e}, l_{\nu_e} \rangle$  与各评价指标间的方差应最小, 即综合评价  $h_e = \langle l_{\mu_e}, l_{\nu_e} \rangle$  为目标优化模型

$$\min \text{Var}(h_x) = \sum_{j=1}^n w_j d^2(h_j, h_x), \quad (4)$$

$$s. t. h_x = \langle l_{\mu_x}, l_{\nu_x} \rangle \in H, h_j = \langle l_{\mu_j}, l_{\nu_j} \rangle \in H,$$

$w_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^n w_j = 1$  的最优解。

**定理 1** 上述模型(4)的最优解为  $h_e = \langle l_{\sum_{j=1}^n w_j \mu_j}, l_{\sum_{j=1}^n w_j \nu_j} \rangle$ 。

**证明:** 由定义 2、定义 3 可得

$$\begin{aligned} \text{Var}(h_x) &= \sum_{j=1}^n w_j (d(h_j, h_x))^2 = \sum_{j=1}^n w_j ((\mu_j - \mu_x)^2 + (\nu_j - \nu_x)^2) = (\mu_x - \sum_{j=1}^n w_j \mu_j)^2 - \\ &(\sum_{j=1}^n w_j \mu_j)^2 + \sum_{j=1}^n w_j \mu_j^2 + (\nu_x - \sum_{j=1}^n w_j \nu_j)^2 - \\ &(\sum_{j=1}^n w_j \nu_j)^2 + \sum_{j=1}^n w_j \nu_j^2 \geq -(\sum_{j=1}^n w_j \mu_j)^2 + \sum_{j=1}^n w_j \mu_j^2 - \\ &(\sum_{j=1}^n w_j \nu_j)^2 + \sum_{j=1}^n w_j \nu_j^2. \end{aligned}$$

当  $\mu_x = \sum_{j=1}^n w_j \mu_j$  并且  $\nu_x = \sum_{j=1}^n w_j \nu_j$  时,  $\text{Var}(h_x)$  取得最小值。又因为直觉模糊语言  $h_j = \langle l_{\mu_j}, l_{\nu_j} \rangle$  满足条件  $\mu_j + \nu_j \in [0, 2\tau]$ , 从而  $\mu_x, \nu_x$  满足

$$\mu_x + \nu_x = \sum_{j=1}^n w_j (\mu_j + \nu_j) \in [0, 2\tau], \text{ 因此}$$

$$\langle l_{\sum_{j=1}^n w_j \mu_j}, l_{\sum_{j=1}^n w_j \nu_j} \rangle \in H, \text{ 即 } h_e = \langle l_{\sum_{j=1}^n w_j \mu_j},$$

$$l_{\sum_{j=1}^n w_j \nu_j} \rangle. \text{ 证毕。}$$

根据以上分析, 下面定义直觉模糊语言运算新

方法。

**定义 4** 设  $h_j = \langle l_{\mu_j}, l_{\nu_j} \rangle (j=1, 2, \dots, n)$  为  $H$  中的一组直觉模糊语言,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  为其对应的权重向量, 满足  $w_j \in [0, 1]$  且  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ , 则运算法则为

$$\textcircled{1} h_1 \oplus h_2 \oplus \dots \oplus h_n = \langle l_{\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \mu_j}, l_{\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \nu_j} \rangle;$$

$$\textcircled{2} w_1 h_1 \oplus w_2 h_2 \oplus \dots \oplus w_n h_n = \langle l_{\sum_{j=1}^n w_j \mu_j},$$

$$l_{\sum_{j=1}^n w_j \nu_j} \rangle.$$

对于前面给出的直觉模糊语言  $h_1 = \langle l_2, l_0 \rangle, h_2 = \langle l_6, l_0 \rangle \in H$ , 则由定义 4 有  $h_1 \oplus h_1 = \langle l_2, l_0 \rangle$ , 即“较差”与“较差”运算结果仍为“较差”; 以及  $h_1 \oplus h_2 = \langle l_4, l_0 \rangle$ , 即“较差”与“很好”运算结果为“较好”; 两种情形均容易让人接受, 且运算结果仍然属于定义中的集合。

## 2.2 直觉模糊语言序关系

为对直觉模糊语言进行比较或排序, 下面首先给出直觉模糊语言期望值的定义。

**定义 5** 对于直觉模糊语言  $h = \langle l_{\mu(h)}, l_{\nu(h)} \rangle \in H$ , 期望值为

$$E(h) = l_{\frac{\mu(h)+2\tau-\mu(h)-\nu(h)}{2}} = l_{\frac{\mu(h)+2\tau-\nu(h)}{2}}. \quad (5)$$

由(5)可知, 期望值愈大, 直觉模糊语言愈优。但仅用期望值作为排序指标, 则无法比较期望值相同的两个直觉模糊语言的大小。例如, 给定七粒度模糊语言集  $L = \{l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} = \{\text{很低, 低, 较低, 一般, 较高, 高, 很高}\}$ , 若取直觉模糊语言  $h_1 = \langle l_4, l_2 \rangle, h_2 = \langle l_3, l_1 \rangle, h_3 = \langle l_3, l_3 \rangle$ , 则有  $E(h_1) = l_4, E(h_2) = l_4, E(h_3) = l_3$ , 故  $h_1 = h_2 > h_3$ , 显然直觉模糊语言  $h_1$  与  $h_2$  无法通过期望值来比较大小。为此, 下面给出直觉模糊语言精确值的定义。

**定义 6** 对于直觉模糊语言  $h = \langle l_{\mu(h)}, l_{\nu(h)} \rangle \in H$ , 精确值为

$$Q(h) = l_{\mu(h)+\nu(h)}. \quad (6)$$

期望值相等的两个直觉模糊语言, 精确值愈大, 包含的决策信息愈完整、愈准确, 其评价也就愈高。对于上述直觉模糊语言  $h_1 = \langle l_4, l_2 \rangle$  与  $h_2 = \langle l_3, l_1 \rangle$ , 分别计算精确值有  $Q(h_1) = l_6, Q(h_2) = l_4$ , 因而  $h_1 > h_2$ 。

基于以上分析, 下面给出直觉模糊语言的序关系。

**定义 7** 对于直觉模糊语言  $h_1, h_2 \in H$ , 设

$E(h_1)$  与  $E(h_2)$  分别为  $h_1, h_2$  的期望值,  $Q(h_1)$  与  $Q(h_2)$  分别为  $h_1, h_2$  的精确值, 则

①若  $E(h_1) > E(h_2)$ , 则  $h_1$  优于  $h_2$ , 即  $h_1 > h_2$ 。

②若  $E(h_1) = E(h_2)$ , 当  $Q(h_1) > Q(h_2)$ , 则  $h_1$  优于  $h_2$ , 即  $h_1 > h_2$ ; 当  $Q(h_1) = Q(h_2)$ , 则  $h_1$  无差异于  $h_2$ , 即  $h_1 = h_2$ 。

### 2.3 直觉模糊语言多属性决策方法

模糊语言在表达模糊决策信息方面具有局限性, 而直觉模糊语言同时考虑正、反两方面评价, 可以更加完整、细腻地描述事物的模糊本质, 因而在表达决策不确定信息时, 直觉模糊语言更具表现力和实用性。为此, 本文采用直觉模糊语言来表达决策信息, 提出一种基于直觉模糊语言信息处理的多属性决策方法。

对于语言型多属性决策问题, 设有  $m$  个备选方案  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ , 各方案均含有  $n$  个评价属性  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 。令属性集对应的权重向量为  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ ,  $\omega$  满足  $\omega_j \in [0, 1]$  且  $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ , 决策者对方案  $A_i$  关于属性  $G_j$  的评价采用直觉模糊语言  $r_{ij} = \langle l_{\mu(r_{ij})}, l_{\nu(r_{ij})} \rangle$  表示, 构成的直觉模糊语言决策矩阵记为  $R = [r_{ij}]_{m \times n}$ 。其中  $l_{\mu(r_{ij})}, l_{\nu(r_{ij})}$  为预先定义好的模糊语言集  $L = \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_{2\tau}\}$  中的模糊语言, 满足  $\mu(r_{ij}) + \nu(r_{ij}) \in [0, 2\tau]$ 。为了确定方案集的排序关系, 需要对方案关于各属性的评价信息进行集成, 以得到排序各方案的综合评价。为此, 具体决策步骤如下。

Step 1 根据决策者给出的正、反两方面模糊语言评价, 得到直觉模糊语言决策矩阵  $R = [r_{ij}]_{m \times n}$ 。

Step 2 对决策矩阵  $R = [r_{ij}]_{m \times n}$  进行规范化处理。

成本型属性评价可通过否定运算(neg)转化为收

表 1 决策者给出各方案关于各属性的评价

Table 1 The evaluation of each attribute in the schemes given by decision makers

方案/属性 Options/Criteria	技术创新( $C_1$ ) Technological innovation ( $C_1$ )	市场走势( $C_2$ ) Market trend ( $C_2$ )	政策扶持( $C_3$ ) Policies support ( $C_3$ )	资金回笼( $C_4$ ) Fund re-steams ( $C_4$ )
智能手机业( $A_1$ ) Smartphone industry ( $A_1$ )	$\langle l_5, l_1 \rangle$	$\langle l_2, l_3 \rangle$	$\langle l_4, l_2 \rangle$	$\langle l_1, l_2 \rangle$
房地产业( $A_2$ ) Real estate ( $A_2$ )	$\langle l_3, l_2 \rangle$	$\langle l_5, l_1 \rangle$	$\langle l_2, l_1 \rangle$	$\langle l_4, l_2 \rangle$
家电业( $A_3$ ) Household appliance industry ( $A_3$ )	$\langle l_4, l_1 \rangle$	$\langle l_4, l_2 \rangle$	$\langle l_4, l_1 \rangle$	$\langle l_5, l_0 \rangle$
互联网业( $A_4$ ) Internet industry ( $A_4$ )	$\langle l_5, l_1 \rangle$	$\langle l_3, l_1 \rangle$	$\langle l_4, l_1 \rangle$	$\langle l_3, l_1 \rangle$

益型评价; 收益型属性评价则无需转化。为方便叙述, 转化后的决策矩阵仍记为  $R = [r_{ij}]_{m \times n}$ ,

$$\text{neg}(r_{ij}) = \text{neg}(\langle l_{\mu(r_{ij})}, l_{\nu(r_{ij})} \rangle) = \langle l_{\nu(r_{ij})}, l_{\mu(r_{ij})} \rangle. \quad (7)$$

Step 3 利用定义 4 中集成方法对决策矩阵  $R = [r_{ij}]_{m \times n}$  中第  $i$  行的决策信息进行集成, 得到决策者对方案  $A_i$  的综合评价  $z_i, (i = 1, 2, \dots, m)$ ,

$$z_i = \langle l_{\sum_{j=1}^n \omega_j \mu(r_{ij})}, l_{\sum_{j=1}^n \omega_j \nu(r_{ij})} \rangle. \quad (8)$$

Step 4 根据定义 5 和定义 6 计算  $z_i$  的期望值  $E(z_i)$  与精确值  $Q(z_i), (i = 1, 2, \dots, m)$ 。

Step 5 根据各方案  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  的期望值和精确值, 按定义 7 对各方案进行比较与排序。

### 3 数值实例

考虑对某大型企业进行产业投资, 共有 4 个备选方案: 智能手机业 ( $A_1$ ), 房地产业 ( $A_2$ ), 家电业 ( $A_3$ ) 和互联网业 ( $A_4$ ) 可供选择。现从 4 个指标(属性): 技术创新 ( $G_1$ ), 市场走势 ( $G_2$ ), 政策扶持 ( $G_3$ ), 资金回笼 ( $G_4$ ) 对各方案进行评价。决策者根据实际需要选取七粒度模糊语言集  $L = \{l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} = \{\text{很低, 低, 较低, 一般, 较高, 高, 很高}\}$ , 对这些方案的各项属性进行评价。其中, 属性的权重向量为  $\omega = (0.25, 0.3, 0.15, 0.3)^T$ 。由于问题的复杂性以及人们思维的模糊性, 决策者难以用模糊语言准确地评价, 于是采用直觉模糊语言进行评价。

例如, 该企业对投资智能手机业 ( $A_1$ ) 关于公司自身的技术创新 ( $G_1$ ) 水平的评价为  $\langle l_0, l_3 \rangle$ , 即企业认为智能手机业 ( $A_1$ ) 具有技术创新 ( $G_1$ ) 的可能性很低, 而不具有技术创新 ( $G_1$ ) 的可能性一般。企业对是否具有创新性保留着一定的犹豫不确定性。

决策者给出各方案关于各属性的评价见表 1。

下面采用本文决策方法,确定最佳的投资产业。

Step 1 根据决策者的评价,得到直觉模糊语言决策矩阵  $R = [r_{ij}]_{4 \times 4}$ ,

$$R = \begin{bmatrix} \langle l_5, l_1 \rangle & \langle l_2, l_3 \rangle & \langle l_4, l_2 \rangle & \langle l_1, l_2 \rangle \\ \langle l_3, l_2 \rangle & \langle l_5, l_1 \rangle & \langle l_2, l_1 \rangle & \langle l_4, l_2 \rangle \\ \langle l_4, l_1 \rangle & \langle l_4, l_2 \rangle & \langle l_4, l_1 \rangle & \langle l_5, l_0 \rangle \\ \langle l_5, l_1 \rangle & \langle l_3, l_1 \rangle & \langle l_4, l_1 \rangle & \langle l_3, l_1 \rangle \end{bmatrix}。$$

Step 2 4 个指标均为收益型属性,属性评价信息无需转化。

Step 3 根据式(8)对决策矩阵  $R$  中第  $i$  行决策信息进行集成,得到方案  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的综合评价价值  $z_i$ ,

$$\begin{aligned} z_1 &= \langle l_{\sum_{j=1}^4 w_j \mu(r_{1j})}, l_{\sum_{j=1}^4 w_j \nu(r_{1j})} \rangle = \langle l_{2.8}, l_{2.1} \rangle, \\ z_2 &= \langle l_{\sum_{j=1}^4 w_j \mu(r_{2j})}, l_{\sum_{j=1}^4 w_j \nu(r_{2j})} \rangle = \langle l_{3.8}, l_{1.6} \rangle, \\ z_3 &= \langle l_{\sum_{j=1}^4 w_j \mu(r_{3j})}, l_{\sum_{j=1}^4 w_j \nu(r_{3j})} \rangle = \langle l_{4.3}, l_{1.0} \rangle, \\ z_4 &= \langle l_{\sum_{j=1}^4 w_j \mu(r_{4j})}, l_{\sum_{j=1}^4 w_j \nu(r_{4j})} \rangle = \langle l_{3.7}, l_{1.0} \rangle。 \end{aligned}$$

表 2 不同决策方法对比与分析

Table 2 Comparison and analysis of different decision-making method

决策方法 Decision-making method	权重信息 Weight information	属性值信息 Information of attribute value	决策结果 Ranking result	方法来源 Source of method
采用 Archimedean S 模算子与群体一致度集成群体评价信息 Archimedean S-norm operator is used to integrate the group evaluation information with the group consistency	实数或未知 Real numbers or unknown	模糊语言 Fuzzy linguistic	不适用 Inapplicable	[7]
利用优先权重和群体一致度自动迭代算法得到方案排序 The scheme ranking is obtained by using the automatic iteration algorithm of priority weight and group consistency	未知 Unknown	模糊语言 Fuzzy linguistic	不适用 Inapplicable	[10]
建立直觉模糊语言决策形式背景及规则提取模型,通过加权相似度排序各方案 After establishing the background of intuitionistic fuzzy linguistic decision form and the model of rule extraction, the schemes are sorted by weighted similarity	实数 Real numbers	直觉模糊语言 Intuitionistic fuzzy linguistic	$e = 0.7,$ $A_3 > A_4 >$ $A_2 > A_1$	[12]
基于模糊偏好关系的加法一致性和群共识,构造直觉模糊偏好关系 Based on the additive consistency and group consensus of fuzzy preference relation, the intuitionistic fuzzy linguistic preference relation is constructed	未知 Unknown	直觉模糊语言 Intuitionistic fuzzy linguistic	$\epsilon = 0.9,$ $\eta = 0.85,$ $A_3 > A_4 >$ $A_2 > A_1$	[13]
基于方差最小化模型集成群体评价信息,通过期望值和精确值排序各方案 Based on the variance minimization model, the group evaluation information is integrated, and each scheme is ranked by expected value and exact value	实数或未知 Real numbers or unknown	直觉模糊语言 Intuitionistic fuzzy linguistic	$A_3 > A_4 >$ $A_2 > A_1$	本文方法 Method of this paper

从表 2 可知,本方法与已有方法存在明显的不同之处。本方法通过方差最小化模型,客观地集成评价

Step 4 计算  $z_i$  的期望值  $E(z_i)$  与精确值  $Q(z_i), (i = 1, 2, 3, 4)$ ,

$$E(z_1) = l_{\frac{2.8+6-2.1}{2}} = l_{3.4}, Q(z_1) = l_{2.8+2.1} = l_{4.9},$$

$$E(z_2) = l_{\frac{3.8+6-1.6}{2}} = l_{4.1}, Q(z_2) = l_{3.8+1.6} = l_{5.4},$$

$$E(z_3) = l_{\frac{4.3+6-1.0}{2}} = l_{4.7}, Q(z_3) = l_{4.3+1.0} = l_{5.3},$$

$$E(z_4) = l_{\frac{3.7+6-1.0}{2}} = l_{4.3}, Q(z_4) = l_{3.7+1.0} = l_{4.7}。$$

Step 5 依据期望值  $E(z_i)$  与精确值  $Q(z_i) (i = 1, 2, 3, 4)$ , 对各方案排序有  $A_3 > A_4 > A_2 > A_1$ 。故该企业投资的最佳产业是家电业( $A_3$ )。

结合决策矩阵中的数据及其权重进行分析,不难发现方案  $A_3$  关于 4 个指标的评价比其他方案高,利用本方法得到的结果与其一致。比较方案  $A_4, A_2$  和  $A_1$ , 易知  $A_4$  优于  $A_1, A_2$  优于  $A_1$ 。比较方案  $A_4$  和  $A_2$ , 可以发现  $G_1$  和  $G_3$  两个指标下的评价  $A_4$  优于  $A_2, G_2$  指标下的评价  $A_2$  优于  $A_4$ , 综合得方案  $A_4$  优于  $A_2$ 。

## 4 对比与分析

在本小节中,将文献[7, 10, 12]方法与本文方法进行比较,具体如表 2 所示。

信息,适用于权重值为实数或未知且属性值为直觉模糊语言的多属性决策问题,较文献[7, 10]中模糊语言

决策方法,能更完整地描述决策者的偏好信息,减少决策信息的丢失。其次,本文基于最优化理论与方法,提出直觉模糊语言新型运算,避免了现有语言型运算<sup>[7,13]</sup>存在越界或违反直觉的不足。再者,文献[12]中决策方法通过直觉模糊语言决策形式背景及规则提取模型,得到各方案的加权相似度,与本文基于方差最小化模型集成群体评价信息的方法,均适合处理属性评价信息包含不确定性的情形。但本方法运算更简单,且结论部分更容易让人理解。文献[14]基于目标规划模型与群共识迭代算法确定群体一致度,与本文通过距离测度构建的偏差最小化模型均适应于群体意见分歧较大的群决策问题,但文献[13]中方法需要决策者事先给出群体一致度阈值 $\epsilon$ 、群体共识度 $\eta$ ,因而决策的主观性较大,实际处理起来往往更为繁琐且复杂。

## 5 结论

直觉模糊语言同时考虑正、反双方面评价,能全面地表达决策者的偏好信息,因而较模糊语言更符合人们犹豫、不确定性的表述习惯。本文在直觉模糊语言集概念的基础上,给出直觉模糊语言方差的定义,并通过方差最小定义了直觉模糊语言新型运算,以及给出直觉模糊语言期望值、精确值和直觉模糊语言序关系定义,进而给出一种直觉模糊语言决策新方法。该方法在一定程度上克服了现有语言型决策仅依靠准则隶属度描述决策者偏好的局限,也避免了语言型决策运算存在着越界或不符合人们直觉的不足。

### 参考文献

- [1] DELGADO M, HERRERA F, HERRERA-VIEDMA E, et al. Combining numerical and linguistic information in group decision making [J]. *Information Sciences*, 1998, 107(1): 177-194.
- [2] HERRERA F, NARTINEZ L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 746-752.
- [3] 王欣荣, 樊治平. 基于二元语义信息处理的一种语言群决策方法[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(5): 1-5.
- [4] 王晓, 陈华友, 刘兮. 基于离差的区间二元语义多属性群决策方法[J]. *管理学报*, 2011, 8(2): 301-305.
- [5] 刘勇, JEFFREY F, 刘思峰. 基于区间二元语义的动态灰色关联群决策方法及应用[J]. *系统工程与电子技术*, 2013, 35(9): 1915-1922.
- [6] BAPI D, DEBASHREE G. Partitioned bonferroni mean based on linguistic 2-tuple for dealing with multi-attribute group decision making [J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 37: 166-179.
- [7] 王中兴, 陈晶, 兰继斌. 基于二元语义 Archimedean S-模集成算子的群决策方法[J]. *中国管理科学*, 2016, 24(8): 146-153.
- [8] LIANG Y Y, LIU J, QIN J D, et al. An improved multi-granularity interval 2-tuple TODIM approach and its application to green supplier selection [J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2019, 21(1): 129-144.
- [9] 黄鲁成, 刘春文, 吴菲菲, 等. 一种基于联系向量“垂面”距离的改进 TOPSIS 多属性决策方法[J]. *系统工程*, 2019, 37(6): 119-129.
- [10] SONG Y M, LI G X. Consensus constructing in large-scale group decision making with multi-granular probabilistic 2-tuple fuzzy linguistic preference relations [J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 56947-56959.
- [11] 陈晶. 基于直觉二元语言信息的多属性群决策方法[D]. 南宁: 广西大学, 2016.
- [12] 姚丽, 曹仪铭, 崔慧, 等. 一种基于直觉模糊语言概念格的规则提取方法[J]. *南京大学学报: 自然科学版*, 2018, 54(4): 765-774.
- [13] 朱小强, 陈子春, 谭佳德. 一种语言直觉模糊偏好关系的群决策方法[J]. *西华大学学报: 自然科学版*, 2020, 39(2): 22-32.
- [14] 戴跃强, 徐泽水, 李琰, 等. 语言信息评估新标度及其应用[J]. *中国管理科学*, 2008, 16(2): 145-149.

# Multiple Attribute Decision - making Method of Intuitionistic Fuzzy Language Based on Variance Minimization

CHEN Jing<sup>1</sup>, WANG Zhongxing<sup>2</sup>, YAO Chen<sup>3</sup>

(1. College of Electrical and Information Engineering, Hunan Institute of Traffic Engineering, Hengyang, Hunan, 421001, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 3. College of Chemistry and Chemical Engine, University of South China, Hengyang, Hunan, 421001, China)

**Abstract:** In view of the problems existed in linguistic decision making, such as boundary-crossing operation and inconsistent with people's intuition, the distance measure of intuitionistic fuzzy language is used to construct a variance minimization model between individual evaluation information and integration results. By solving the model, a new method of intuitionistic fuzzy linguistic operation is given, and the ranking relationship between the expected value, accurate value and intuitionistic fuzzy language is given. Then a multi-attribute decision making method is proposed, in which the attribute weights are known or completely unknown and the attribute values are intuitionistic fuzzy language. Finally, the obtained decision-making method is applied to specific numerical examples to verify its rationality and effectiveness by comparing with the existing methods. The results of numerical example shows that the proposed method overcomes the shortcomings of the existing linguistic operations that are beyond the bounds and do not conform to people's intuition.

**Key words:** multiple attribute decision making, uncertainty, intuitionistic fuzzy linguistic set, distance measure, variance minimization

责任编辑:符支宏



微信公众号投稿更便捷

联系电话:0771-2503923

邮箱:gxkx@gxas.cn

投稿系统网址:<http://gxkx.ijournal.cn/gxkx/ch>