

轮式移动机器人的有限时间自适应轨迹跟踪控制* Adaptive Trajectory Tracking of Wheeled Mobile Robots with Finite-time Convergence

黄 译, 翟军勇**

HUANG Yi, ZHAI Junyong

(东南大学自动化学院, 江苏南京 210096)

(School of Automation, Southeast University, Nanjing, Jiangsu, 210096, China)

摘要:【目的】针对存在外界扰动和参数不确定性的轮式移动机器人,设计一种有限时间轨迹跟踪控制方案。【方法】首先,将轮式移动机器人动态系统分为二阶和三阶的两个子系统;其次,针对二阶子系统设计了自适应快速终端滑模控制律,保证移动机器人角速度跟踪误差有限时间内收敛到一个任意小的区域内;然后,设计了关于线速度的控制律,来保证三阶子系统的有限时间收敛;最后进行仿真实验验证。【结果】仿真实验结果与理论值相符。【结论】本研究设计的有限时间控制策略保证了移动机器人轨迹跟踪的效果。

关键词:有限时间控制 快速非奇异终端滑模 轮式移动机器人

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2017)03-0279-07

Abstract:【Objective】This paper developed a novel finite-time control scheme for trajectory tracking of wheeled mobile robots in the presence of external disturbances and inertia uncertainties. 【Methods】Firstly, the error dynamics of mobile robots were divided into a second-order subsystem and a third-order subsystem. Secondly, a novel fast nonsingular terminal sliding mode control law (FNTSMCL) associated with adaptation of the angular velocity was designed for the second-order subsystem to ensure the finite-time convergence of the angle error of mobile robots. Then, a FNTSMCL of forward velocity was synthesized, which guaranteed the finite-time convergence of the third-order subsystem. Finally, the simulation experiment was carried out. 【Results】The simulation results were in agreement with the theoretical values. 【Conclusion】The finite-time control strategy designed in this study ensures the effect of wheeled mobile robot trajectory tracking.

Key words: finite-time control, fast nonsingular terminal sliding mode, wheeled mobile robot

0 引言

【研究意义】近几年,轮式移动机器人的轨迹跟踪控制问题受到了广泛的关注和研究,它不仅具有非线性

性、强耦合和非完整约束,还具有外部扰动和参数不确定性。一些非线性控制策略被应用到该领域,包括自适应控制^[1]、神经网络控制^[2]、鲁棒控制^[3]和滑模控制^[4]等。Zeng等^[2]利用自适应神经网络技术和高增益状态观测技术设计了一种新的自适应控制器,克服了系统中参数未知和不可测状态带来的困难。【前人研究进展】Xin等^[3]结合扰动观测器和自适应补偿器处理移动机器人动态系统的不确定性。沈艳军等^[5]和陈武华等^[6]介绍了非线性系统的自适应观测器,可用于观测移动机器人动力学模型中的扰动以提高系统的鲁棒性。Huang等^[7]研究了轮式移动器

收稿日期: 2017-04-12

作者简介: 黄译(1992—),男,硕士研究生,主要从事机器人运动控制研究。

* 国家自然科学基金项目(61473082)资助。

** 通信作者: 翟军勇(1977—),男,教授,博士生导师,主要从事非线性系统分析与控制研究, E-mail: jyzhai@seu.edu.cn。

人输入受限问题。轮式移动机器人作为具有饱和执行器的不确定系统,可用黎艳等^[8]的控制方法来处理。另外,很多文献将滑模控制应用于轮式移动机器人的研究中。Park等^[9]针对轮式移动机器人的运动学、动力学和电动力学模型,利用反步法和动态面技术设计了具有 σ 修正的电压自适应控制器,实现了轨迹跟踪控制。针对模型中存在未知参数或外部扰动的情形,Hou等^[10]和Hwang等^[11]设计了自适应鲁棒模糊控制器来解决轨迹跟踪控制问题。Do等^[12]和Wang等^[13]结合Lyapunov函数法和反步法设计了输出反馈控制器,使得机器人渐近跟踪上期望轨迹。Zhu等^[14]和Buccieri等^[15]分别利用横截函数方法和微分平坦方法设计了轨迹跟踪与镇定统一控制器。Ou等^[16]和Mija等^[17]针对轮式移动机器人动力学模型利用滑模变结构设计了有限时间轨迹跟踪控制器。Li等^[18]将神经网络应用于非线性系统,而移动机器人系统亦可引入智能控制。例如,Boukens等^[19]针对存在时变参数不确定性和外部干扰的移动机器人轨迹跟踪问题,结合最优控制、神经网络和鲁棒控制技术设计了智能控制器。【本研究切入点】受Lu等^[20]的启发,本研究针对存在外界扰动和参数不确定性的轮式移动机器人设计了有限时间轨迹跟踪控制器。相对于先前的研究方法,本研究没有使用反步法,从而避免了反复使用虚拟控制器带来的积分膨胀问题。【拟解决的关键问题】为了便于轨迹跟踪控制器的设计,本研究将轮式移动机器人动态系统分为与线速度和角速度相关的两个子系统。首先,设计自适应快速终端滑模控制律,使得机器人的姿态角跟踪误差在有限时间内收敛到一个任意小的区域内,再设计线速度控制律,来保证位置跟踪误差的收敛性。

【本研究切入点】受Lu等^[20]的启发,本研究针对存在外界扰动和参数不确定性的轮式移动机器人设计了有限时间轨迹跟踪控制器。相对于先前的研究方法,本研究没有使用反步法,从而避免了反复使用虚拟控制器带来的积分膨胀问题。【拟解决的关键问题】为了便于轨迹跟踪控制器的设计,本研究将轮式移动机器人动态系统分为与线速度和角速度相关的两个子系统。首先,设计自适应快速终端滑模控制律,使得机器人的姿态角跟踪误差在有限时间内收敛到一个任意小的区域内,再设计线速度控制律,来保证位置跟踪误差的收敛性。

1 问题描述

本研究讨论的机器人模型如图1所示。移动机器人由后部两轮进行驱动,驱动轮半径为 r ,间距为 $2b$,质心为 P 。定义移动机器人在世界坐标系 $X-O-Y$ 的位姿状态为 $q = (x, y, \theta)^T$, x 和 y 分别为 P 点的横纵坐标, θ 为移动机器人正方向与 OX 轴的夹角,其线速度为 v ,角速度为 ω 。

轮式移动机器人的动态模型可以表示如下:

$$\dot{q} = S(q)\eta, \quad (1)$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + \tau_d = B(q)\tau - A^T(q)\lambda, \quad (2)$$

其中, $\eta = (v, \omega)^T$ 为线速度和角速度组成的向量; $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T$ 表示左右轮对应的转矩, M 是一个对称的正定矩阵, $C(q, \dot{q})$ 表示科氏力矩阵, $F(\dot{q})$ 为表面摩

擦力, λ 代表拉格朗日系数。

假设机器人的质心和几何中心重合在 P 点,那么 $C(q, \dot{q})$ 等于零。矩阵 $S(q)$ 、 $M(q)$ 、 $B(q)$ 以及 $A(q)$ 分别为

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix},$$

$$B(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ b & -b \end{bmatrix}, A(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

其中, m 是移动机器人质量, J 代表其转动惯量。

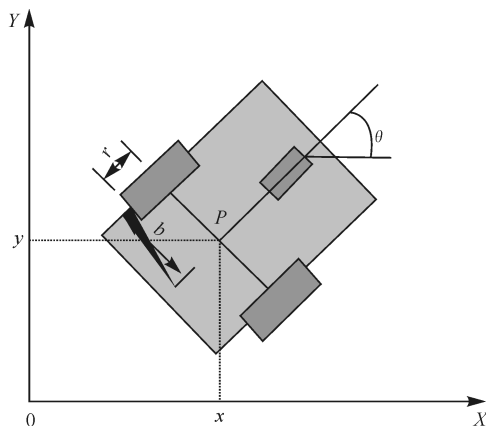


图1 轮式移动机器人模型

Fig. 1 Wheeled mobile robot model

在移动机器人满足非完整限制的情况下, $A(q)\dot{q} = 0$ 。从式(1)中,可得

$$\dot{q} = S(q)\dot{\eta} + \dot{S}(q)\eta, \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),得到:

$$M(q)S(q)\dot{\eta} + M(q)\dot{S}(q)\eta + C(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + \tau_d = B(q)\tau - A^T(q)\lambda. \quad (4)$$

根据 $M(q)$ 、 $S(q)$ 、 $A(q)$ 和 $C(q, \dot{q})$ 的定义可得:

$$S^T(q)A^T(q) = 0, S^T(q)M(q)\dot{S}(q)\eta = 0,$$

将式(4)左乘 $S^T(q)$,并化简可得:

$$\bar{M}\dot{\eta} + d = \bar{B}\tau, \quad (5)$$

其中, $\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$, $d = (-d_1, -d_2)^T = S^T(F(\dot{q}) + \tau_d)$,以及 $\bar{B} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & -b \end{bmatrix}$ 。

进一步可以得到简化的机器人动力学模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{m}v = u_1 + d_1 \\ \dot{J}\dot{\omega} = u_2 + d_2 \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}(\tau_1 + \tau_2) \\ \frac{b}{r}(\tau_1 - \tau_2) \end{pmatrix}$, d_1 和 d_2 表示系统中包

含外部扰动和参数不确定性的集总扰动。

设移动机器人参考轨迹为

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_r \cos \theta_r \\ \dot{y}_r = v_r \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r = \omega_r \end{cases} \quad (7)$$

跟踪误差定义为

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \theta - \theta_r \end{bmatrix} \quad (8)$$

进一步得到:

$$\begin{cases} \dot{x}_e = v - v_r \cos \theta_e + \omega y_e \\ \dot{y}_e = v_r \sin \theta_e - \omega x_e \\ \dot{\theta}_e = \omega - \omega_r = \omega_e \end{cases} \quad (9)$$

下面将误差系统分为两个子系统,一个二阶子系统:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_e = \omega_e \\ \dot{J}\dot{\omega} = u_2 + d_2 \end{cases} \quad (10)$$

和一个三阶子系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_e = v - v_r \cos \theta_e + \omega y_e \\ \dot{y}_e = v_r \sin \theta_e - \omega x_e \\ \dot{m}v = u_1 + d_1 \end{cases} \quad (11)$$

2 跟踪控制器设计

为了便于叙述,给出如下引理和假设。

引理 2.1^[8] 对于非线性系统,如果存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 和实数 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 以及 $0 < \kappa < 1$ 使得 $\dot{V}(x) + \lambda_1 V(x) + \lambda_2 V^\kappa(x) \leq 0$, 那么系统状态可在有限时间内达到平衡点,且其镇定时间为 $T_0 \leq \frac{1}{\lambda_1(1-\kappa)} \ln \frac{\lambda_1 V^{1-\kappa}(x_0) + \lambda_2}{\lambda_2}$ 。

假设 2.1 集总扰动 d_1 和 d_2 都是有界的,即 $|d_1| \leq d_{\max}, |d_2| \leq d_{\max}$, 其中 d_{\max} 为一个正常数。

2.1 角速度的有限时间控制器设计

本节中,选取如下滑模面:

$$S_1 = \omega_e + k_1 \theta_e + k_2 S_{au1},$$

$$S_{au1} = \begin{cases} \theta_e^r, & \text{if } \bar{S}_1 = 0 \text{ or } \bar{S}_1 \neq 0, |\theta_e| \geq \epsilon \\ \iota_1 \theta_e + \iota_2 \text{sign}(\theta_e) \theta_e^2, & \text{if } \bar{S}_1 \neq 0, |\theta_e| < \epsilon \end{cases},$$

其中, $\bar{S}_1 = \omega_e + k_1 \theta_e + k_2 \theta_e^r, r = \frac{r_1}{r_2} (r_1, r_2 \text{ 为正奇数})$,

且满足 $0 < r < 1$ 以及 $\iota_1 = (2 - \frac{r_1}{r_2}) \epsilon^{\frac{r_1}{r_2}-1}, \iota_2 = (\frac{r_1}{r_2} -$

$1) \epsilon^{\frac{r_1}{r_2}-2}$, 将系统作变换得到下式:

$$J\dot{S}_1 = F_2 + u_2, \quad (12)$$

其中, $F_2 = -J\dot{\omega}_e + JE + d_2, E = (k_1 + k_2 E_v) \omega_e$, 以及 $E_v =$

$$\begin{cases} r \theta_e^{r-1}, & \text{if } \bar{S}_1 = 0 \text{ or } \bar{S}_1 \neq 0, |\theta_e| \geq \epsilon \\ \iota_1 I + 2\iota_2 \sin(\theta_e) \theta_e, & \text{if } \bar{S}_1 \neq 0, |\theta_e| < \epsilon \end{cases}.$$

引理 2.2 如果 $S_1 = \bar{S}_1 = 0$, 那么系统可在有限时间内达到 $\omega_e = 0, \theta_e = 0$ 。

证明 如果 $S_1 = \bar{S}_1 = 0$, 那么 $\omega_e = -k_1 \theta_e - k_2 \theta_e^r$ 。选取李雅普诺夫函数 $V_{\theta_e} = \frac{1}{2} \theta_e^2$ 。对其求导可得:

$$\dot{V}_{\theta_e} = \theta_e \omega_e = -k_1 \theta_e^2 - k_2 \theta_e^{r+1},$$

$$\dot{V}_{\theta_e} + 2k_1 V_{\theta_e} + k_2 2^{\frac{r+1}{2}} V_{\theta_e}^{\frac{r+1}{2}} \leq 0.$$

由引理 2.1 可知, θ_e 可以在有限时间 T_1 内收敛到零, 其中,

$$T_1 \leq T_0 + \frac{1}{2k_1(\frac{1-r}{2})} \ln \frac{k_1 V_{\theta_e}^{\frac{1-r}{2}}(\theta_e(0)) + k_2}{k_2}.$$

假设 2.2 在系统(12)中, 包含外部扰动和参数不确定性的集总扰动 F_2 满足: $|F_2| \leq J|\dot{\omega}_r| + |d_{\max}| + |D_1||\omega| + |D_1||\omega_r| \leq \zeta_1 + \vartheta_1|\xi_1|$, 其中 $D_1 = J(k_1 + k_2 E_v), \xi_1 = \max\{|\omega|, |\theta|, |\omega\theta|\}, \zeta_1 > 0, \vartheta > 0$ 。

实际中, 外部扰动是有界的, 参考轨迹的 θ_r 和 ω_r 也是有界的, 因此假设 2.2 是合理的。于是, 设计了如下自适应控制器:

$$u_{21} = -\alpha_1 S_1 - u_{adp}, \quad (13)$$

其中, $\alpha_1 S_1$ 是反馈部分, 自适应估计律 u_{adp} 用来压制集总扰动, 其设计如下:

$$u_{adp} = \begin{cases} \frac{S_1}{|S_1|} \hat{\chi}_1, & \text{if } |S_1| |\hat{\chi}_1| > \epsilon_1 \\ \frac{S_1}{\epsilon_1} \hat{\chi}_1^2, & \text{if } |S_1| |\hat{\chi}_1| \leq \epsilon_1 \end{cases}, \quad (14)$$

其中, $\epsilon_1 > 0$ 是待定设计参数, $\hat{\chi}_1 = \hat{\zeta}_1 + \hat{\vartheta}_1 |\xi_1|$, $\alpha_1 > 0$, $\hat{\zeta}_1, \hat{\vartheta}_1$ 分别是参数 ζ_1 和 ϑ_1 的估计值。设计自适应律如下:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}}_1 &= -\epsilon_1 \hat{\zeta}_1 + \bar{p}_1 |S_1|, \\ \dot{\hat{\vartheta}}_1 &= -\epsilon_2 \hat{\vartheta}_1 + \bar{q}_1 |S_1| |\xi_1|, \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $\bar{p}_1 > 0, \bar{q}_1 > 0$ 以及 $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ 都是待定设计参数。令 $\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1 - \hat{\zeta}_1$ 和 $\tilde{\vartheta}_1 = \vartheta_1 - \hat{\vartheta}_1$ 是对应参数的估计误差。

定理 2.1 根据动态系统(10), 通过控制器(13)以及自适应律(14), $S_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\vartheta}_1$ 是一致最终有界的。

证明 证明过程分为两步。

步骤 1: 在 $|S_1| \hat{\chi}_1 > \epsilon_1$ 的情况下, 考虑如下李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(S_1^T J S_1 + \frac{1}{p_1} \tilde{\zeta}_1^2 + \frac{1}{q_1} \tilde{\vartheta}_1^2 \right),$$

对其求导可得:

$$\dot{V}_1 = -(\alpha_1 S_1^2 + S_1 u_{adp}) + F_2 - \frac{1}{p_1} \dot{\tilde{\zeta}}_1 \tilde{\zeta}_1 - \frac{1}{q_1} \dot{\tilde{\vartheta}}_1 \tilde{\vartheta}_1, \quad (16)$$

由假设 2.2 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -(\alpha_1 S_1^2 + S_1 u_{adp}) + \zeta_1 |S_1| + \\ &\vartheta_1 |S_1| |\xi_1| - \frac{1}{p_1} \dot{\tilde{\zeta}}_1 \tilde{\zeta}_1 - \frac{1}{q_1} \dot{\tilde{\vartheta}}_1 \tilde{\vartheta}_1, \end{aligned}$$

将自适应律代入可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -(\alpha_1 S_1^2 + S_1 u_{adp}) + \zeta_1 |S_1| + \\ &\vartheta_1 |S_1| |\xi_1| - \frac{1}{p_1} \dot{\tilde{\zeta}}_1 \tilde{\zeta}_1 - \frac{1}{q_1} \dot{\tilde{\vartheta}}_1 \tilde{\vartheta}_1 \leq -(\alpha_1 S_1^2 + \\ &|S_1| \hat{\chi}_1) + \zeta_1 |S_1| + \vartheta_1 |S_1| |\xi_1| + \frac{\epsilon_1}{p_1} \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_1 + \\ &\frac{\epsilon_2}{q_1} \tilde{\vartheta}_1 \tilde{\vartheta}_1 - \zeta_1 |S_1| + \zeta_1 |S_1| - \vartheta_1 |S_1| |\xi_1| + \\ &\dot{\tilde{\vartheta}}_1 |S_1| |\xi_1| = -(\alpha_1 S_1^2 - \frac{\epsilon_1}{p_1} \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_1 - \frac{\epsilon_2}{q_1} \tilde{\vartheta}_1 \tilde{\vartheta}_1) \leq -\alpha_1 S_1^2 \\ &- \frac{\nu_1}{2p_1} \tilde{\zeta}_1^2 - \frac{\nu_2}{2q_1} \tilde{\vartheta}_1^2 + \frac{\nu_3}{p_1} \zeta_1^2 + \frac{\nu_4}{q_1} \vartheta_1^2, \end{aligned}$$

于是, 可以得到 $\dot{V}_1 \leq -\eta_1 V_1 + \delta_1$, 其中, $\eta_1 = \min(\nu_1, \nu_2, \frac{2\alpha}{J})$, $\delta_1 = \frac{\nu_3}{p_1} \zeta_1^2 + \frac{\nu_4}{q_1} \vartheta_1^2$, $\nu_3 = \frac{\epsilon_1(2o_1 - 1)}{o_1}$, $\nu_4 = \frac{\epsilon_2(2o_2 - 1)}{o_2}$, $o_1 > \frac{1}{2}$, $o_2 > \frac{1}{2}$ 。

步骤 2: 在 $|S_1| \hat{\chi}_1 \leq \epsilon_1$ 的情况下, 将控制器(13)和自适应律(14)代入可得:

$$\dot{V}_1 \leq -(\alpha_1 S_1^2 + \frac{S_1^2}{\epsilon_1} \hat{\chi}_1^2) + (\zeta_1 + \hat{\vartheta}_1 |\xi_1|) |S_1| -$$

$$\frac{\epsilon_1}{p_1} \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_1 - \frac{\epsilon_2}{q_1} \tilde{\vartheta}_1 \tilde{\vartheta}_1 \leq -\alpha_1 S_1^2 + \left(\frac{S_1}{\sqrt{\epsilon_1}} \hat{\chi}_1 - \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2} \right)^2 -$$

$$\frac{\epsilon_1}{p_1} \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_1 - \frac{\epsilon_2}{q_1} \tilde{\vartheta}_1 \tilde{\vartheta}_1 - \frac{\epsilon_1}{4} \leq -\eta_1 V_1 + \delta_2,$$

其中, $\delta_2 = \frac{\nu_3}{p_1} \zeta_1^2 + \frac{\nu_4}{q_1} \vartheta_1^2 + \frac{\epsilon_1}{4}$ 。根据文献[21]中的有

界性定理, $S_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\vartheta}_1$ 是一致最终有界的。

从定理 2.1 可知控制器(13)使子系统(10)达到了一致有界。为了使系统达到有限时间稳定, 在控制器中加入非线性反馈项 $-\sigma_1 \text{sign}(S_1) |S_1|^{\frac{1}{2}}$, 进而控制器改为

$$u_{22} = -u_{21} - \sigma_1 \text{sign}(S_1) |S_1|^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

将式(17)代入式(12), 可得

$$J\dot{S}_1 = \tilde{F}_2 - \alpha_1 S_1 - \sigma_1 \text{sign}(S_1) |S_1|^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

其中, $\tilde{F}_2 = F_2 - u_{adp}$, 即 $\tilde{F}_2 = F_2 - \frac{S_1}{|S_1|} \hat{\chi}_1$ 。根据定

理 2.1, $S_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\vartheta}_1$ 都是有界的, 所以 \tilde{F}_2 也是有界的, 在此不妨假设 $|\tilde{F}_2| \leq \delta_3$ 。其中, δ_3 为正常数。

定理 2.2 考虑系统(18), 在控制器(17)和自适应律(14)的作用下, 滑模面 S_1 将在有限时间内收敛到区域 \mathcal{Q}_S , 然后跟踪误差 θ_e 和 ω_e 也会在有限时间内分别收敛到 \mathcal{Q}_θ 和 \mathcal{Q}_ω , 其中 $\mathcal{Q}_S = \max(\mathcal{Q}_{S1}, \mathcal{Q}_{S2})$, $\mathcal{Q}_\theta = \max(\epsilon, \epsilon_S)$, $\mathcal{Q}_\omega = \mathcal{Q}_S + k_1 \mathcal{Q}_\theta + k_2 \mathcal{Q}_\theta'$; $\mathcal{Q}_{S1} = \frac{\delta_3}{\alpha_1}$, $\mathcal{Q}_{S2} =$

$$\left(\frac{\delta_3}{2\alpha_1} \right)^2, \epsilon_S = \min \left(\frac{\mathcal{Q}_S}{k_1}, \sqrt{\frac{\mathcal{Q}_S}{k_1}} \right).$$

证明 这里也分为两个步骤。

步骤 1: 先证明滑模面 S_1 将在有限时间内收敛到区域 \mathcal{Q}_S 。

考虑如下李雅普诺夫函数:

$$V_2 = \frac{1}{2} S_1^T J S_1, \quad (19)$$

对其求导, 并将式(18)代入可得:

$$\dot{V}_2 \leq -(\alpha_1 S_1^2 + \sigma_1 |S_1|^{\frac{3}{2}}) + |S_1| \delta_3. \quad (20)$$

根据式(20), 在 $|S_1| > \mathcal{Q}_S$ 的情况下,

$$\dot{V}_2 \leq -\eta_2 V_2 - \eta_3 V_2^{\frac{3}{4}},$$

其中 $\eta_2 = \frac{2\alpha_1}{J}$, $\eta_3 = \sigma_1 \left(\frac{2\alpha_1}{J} \right)^{\frac{3}{4}}$ 。

步骤 2: 再证明跟踪误差 θ_e 和 ω_e 也会在有限时间内分别收敛到区域 \mathcal{Q}_θ 和 \mathcal{Q}_ω 。

在 $|\theta_e| \geq \epsilon$ 的情况下, 根据 S_1 的表达式可得:

$$\begin{aligned} \omega_e + k_1 \theta_e + k_2 \theta_e' &= \epsilon_1, \\ |\epsilon_1| &\leq \mathcal{Q}_S, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \omega_e + (k_1 - \frac{\epsilon_1}{\theta_e})\theta_e + k_2\theta_e^r &= \epsilon_1, \\ \omega_e + k_1\theta_e + (k_2 - \frac{\epsilon_1}{\theta_e})\theta_e^r &= \epsilon_1, \end{aligned} \quad (22)$$

根据引理 2.2, 当满足条件 $k_1 - \frac{\epsilon_1}{\theta_e} > 0$ 或 $k_2 -$

$\frac{\epsilon_1}{\theta_e} > 0$ 时, 上述式(21)演化成传统的快速终端滑模面, 所以此情况下 θ_e 和 ω_e 会在有限时间内分别收敛; 而在 $|\theta_e| < \epsilon$ 的情况下, θ_e 已经在该临域内, θ_e 和 ω_e 会在有限时间内分别收敛到 q_θ 和 q_ω 。

2.2 线速度的有限时间控制器设计

前面已经得到, 控制器(17)保证了角速度误差在有限时间内收敛到小区域 q_ω 。因此 $\sin \theta_e \rightarrow 0$, $\cos \theta_e \rightarrow 1$ 。所以, 动态子系统(11)可以简化为

$$\begin{cases} \dot{x}_e = v - v_r + \omega_r y_e \\ \dot{y}_e = -\omega_r x_e \\ \dot{m}v = u_1 + d_1 \end{cases}, \quad (23)$$

令 $\Omega_e = x_e - \text{sign}(\omega_r)y_e$, 定义 $\Phi = \dot{\Omega}_e = v_e + |\omega_r| x_e + \omega_r y_e$ 。

现控制器设计如下:

$$S_2 = \Phi + k_1\Omega_e + k_2S_{au2},$$

$$S_{au2} = \begin{cases} \Omega_e^r, & \text{if } \bar{S}_2 = 0 \text{ or } \bar{S}_2 \neq 0, |\Omega_e| \geq \epsilon \\ \iota_3\Omega_e + \iota_4\text{sign}(\Omega_e)\Omega_e^2, & \text{if } \bar{S}_2 \neq 0, |\Omega_e| < \epsilon \end{cases}, \quad (24)$$

其中, $\bar{S}_2 = \Omega_e + k_1\Omega_e + k_2\Omega_e^r$ 。

将系统作变换得到如下式子:

$$m\dot{S}_2 = F_1 + u_1, \quad (25)$$

其中, $F_1 = -m\dot{v}_r + d_1 - \omega_r^2 x_e + m[|\dot{\omega}_r| x_e + |\dot{\omega}_r| y_e + |\omega_r| (v_e + \omega_r y_e)] + mk_1\Phi + mk_2\Phi E_\omega$,

$$E_\omega = \begin{cases} r\Omega_e^{-1}, & \text{if } \bar{S}_2 = 0 \text{ or } \bar{S}_2 \neq 0, |\Omega_e| \geq \epsilon \\ \iota_3 I + 2\iota_4\text{sign}(\Omega_e)\Omega_e, & \text{if } \bar{S}_2 \neq 0, |\Omega_e| < \epsilon \end{cases}.$$

引理 2.3 如果 $S_2 = \bar{S}_2 = 0$, 那么系统可在有限时间内达到 $\Omega_e = 0, \Phi = 0$ 。

此证明和引理 2.2 相似, 故在此省略。

假设 2.3 系统(25)中, 包含外部扰动和参数不确定性的集总扰动 F_1 满足: $|F_1| \leq \zeta_2 + \vartheta_2 |\xi_2|$, 其中 $|\xi_2| := \max\{|\Omega|, |\Phi|, |\Omega\Phi|\}$, $\zeta_2 > 0$, $\vartheta_2 > 0$ 。

实际中, 外部扰动是有界的, 移动机器人的质量也是有界的, 参考轨迹的 x_r, y_r, v_r 以及它们的导数也是有界的, 因此假设 2.3 是合理的。于是, 设计如下自适应控制器:

$$u_{11} = -\alpha_2 S_2 - u_{adt}, \quad (26)$$

其中, $\alpha_2 S_2$ 是反馈部分, 自适应估计律 u_{adt} 用来压制集总扰动的上界, 其设计如下:

$$u_{adt} = \begin{cases} \frac{S_2}{|S_2|} \hat{\chi}_2^2, & \text{if } |S_2| |\hat{\chi}_2| > \epsilon_2 \\ \frac{S_2}{\epsilon_2} \hat{\chi}_2^2, & \text{if } |S_2| |\hat{\chi}_2| \leq \epsilon_2 \end{cases}, \quad (27)$$

其中 $\epsilon_2 > 0$ 是待设计参数, $\hat{\chi}_2 = \hat{\zeta}_2 + \hat{\vartheta}_2 |\xi_2|$, $\alpha_2 > 0$, $\hat{\zeta}_2, \hat{\vartheta}_2$ 分别是参数 ζ_2 和 ϑ_2 的估计值。设计自适应律如下:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}}_2 &= -\epsilon_3 \hat{\zeta}_2 + \bar{p}_2 |S_2|, \\ \dot{\hat{\vartheta}}_2 &= -\epsilon_4 \hat{\vartheta}_2 + \bar{q}_2 |S_2| |\xi_2|, \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\bar{p}_2 > 0, \bar{q}_2 > 0$ 以及 $\epsilon_3 > 0, \epsilon_4 > 0$ 都是待设计的参数。 $\tilde{\zeta}_2 = \zeta_2 - \hat{\zeta}_2$ 和 $\tilde{\vartheta}_2 = \vartheta_2 - \hat{\vartheta}_2$ 是对应参数的估计误差。

定理 2.3 根据动态系统(11), 通过控制器(26)

以及自适应律(27), $S_2, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\vartheta}_2$ 是一致最终有界的。

此证明和定理 2.1 证明相似, 故在此省略。

从定理 2.3 可知控制器(26)成功使子系统(11)达到了一致有界。为了使系统达到有限时间稳定, 在控制器中加入非线性反馈项 $-\sigma_2 \text{sign}(S_2) |S_2|^{\frac{1}{2}}$, 进而控制器改为

$$u_{12} = -u_{11} - \sigma_2 \text{sign}(S_2) |S_2|^{\frac{1}{2}}, \quad (29)$$

将式(31)代入式(27), 可得

$$J\dot{S}_2 = \tilde{F}_1 - \alpha_2 S_2 - \sigma_2 \text{sign}(S_2) |S_2|^{\frac{1}{2}}, \quad (30)$$

其中 $\tilde{F}_1 = F_1 - u_{adt}$ 。根据定理 2.3, $S_2, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\vartheta}_2$ 都是有界的, 所以 \tilde{F}_1 也是有界的, 在此不妨假设 $|\tilde{F}_1| \leq \delta_1$, 其中 δ_1 为正常数。

定理 2.4 考虑系统(30), 在控制器(29)和自适应律(27)的作用下, 滑模面 S_2 将在有限时间内收敛到区域 ρ_S , 然后跟踪误差 Ω_e 也会在有限时间内收敛到 ρ_Ω 。

其中 $\rho_S = \max(\rho_{S1}, \rho_{S2}), \rho_\Omega = \max(\epsilon, \epsilon_{S2}); \rho_{S1} =$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_2}, \rho_{S2} = \left(\frac{\delta_1}{2\alpha_2}\right)^2, \epsilon_{S2} = \min\left(\frac{\rho_S}{k_1}, \sqrt{\frac{\rho_S}{k_1}}\right)。$$

此证明和定理 2.2 证明相似, 故在此省略。

定理 2.5 考虑子系统(23), 随着滑模面 $\Omega_e = x_e - \text{sign}(\omega_r)y_e$ 收敛到 ρ_Ω , 跟踪误差 x_e 和 y_e 也会分

别收敛到区域 ρ_x 和 ρ_y 。其中 $\rho_x = \frac{\rho_\Omega}{|\omega_r|}$, $\rho_y = \frac{\rho_\Omega}{|\omega_r|}$ 。

证明 考虑如下李雅普诺夫函数:

$$V_y = \frac{1}{2}y_e^2, \quad (31)$$

根据 $\Omega_e = x_e - \text{sign}(\omega_r)y_e$ 以及 Ω_e 收敛到 ρ_Ω , 可得 $|x_e - \text{sign}(\omega_r)y_e| < \rho_\Omega$, 对式(31)求导可得:

$$\dot{V}_y = y_e \dot{y}_e = -y_e \omega_r x_e \leq -|\omega_r| y_e^2 + |y_e| \rho_\Omega, \quad (32)$$

从上述不等式可知, 在 $|y_e| > \rho_y$ 的情况下, $\dot{V}_y \leq -|\omega_r| V_y$, 所以 y_e 会收敛到区域 ρ_y , 同时 x_e 也会收敛到区域 ρ_x 。证毕。

3 仿真实验

为了验证控制器的有效性, 在 MATLAB 下构建如式(1)和(2)的轮式移动机器人模型, 并进行仿真。轮式移动机器人模型的参数选择如下: $b = 0.3 \text{ m}$, $r = 0.1 \text{ m}$, $J = 2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 以及 $m = 4 \text{ kg}$ 。集总扰动参数设置为 $d_1 = 0.2\nu + \omega + \cos(te^{-t})$, $d_2 = \nu + 0.3\omega + \sin t$ 。参考移动机器人的初始位置和姿态设置为 $(x_r(0), y_r(0), \theta_r(0)) = (4, 2, \frac{\pi}{2})$ 。轮式移动机器人的初始位置和姿态设置为 $(x(0), y(0), \theta(0)) = (5, 1, 0)$ 。参考速度设置为 $\nu_r = 2 \text{ m/s}$, $\omega_r = 1 \text{ rad/s}$ 。控制器和自适应律中各项参数设置为 $\alpha_1 = \alpha_2 = 60$, $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 6$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0.35$, $\epsilon_2 = \epsilon_4 = 0.16$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$, $r_1 = 7$, $r_2 = 9$, $k_1 = k_2 = 1$, $\xi_1(0) = \xi_2(0) = \vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = 0.1$, $\epsilon = 0.005$, $\epsilon = 0.05$ 。图 2 表明各项位姿误差最后收敛到平衡位置, 图 3 是参考轨迹和实际轨迹图, 图 4 对应控制转矩的控制量, 实验结果很好地验证了控制器的有效性。

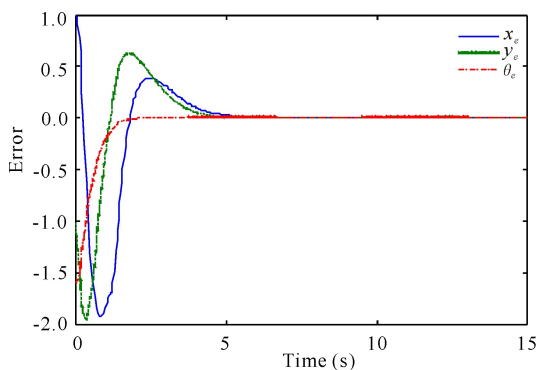


图 2 轨迹跟踪误差

Fig. 2 Tracking errors

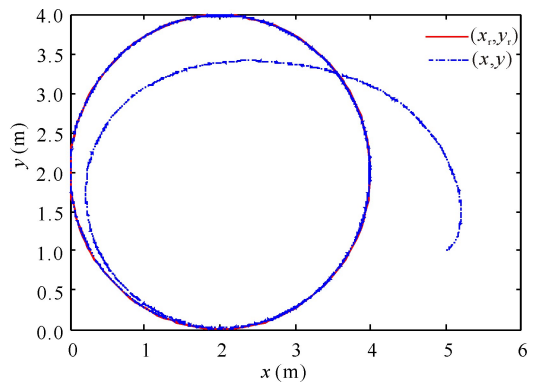


图 3 轨迹跟踪曲线

Fig. 3 Trajectory tracking curve

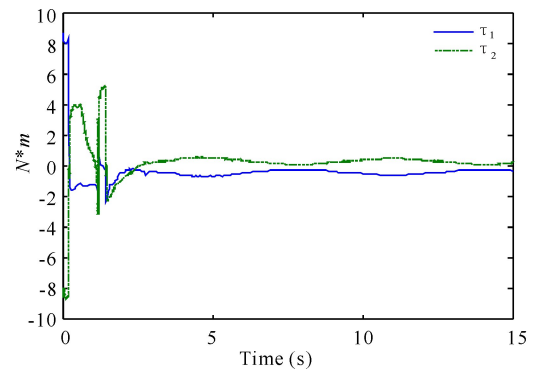


图 4 控制转矩

Fig. 4 Control torques

4 结论

本研究针对轮式移动机器人动力学模型, 提出了一种有限时间自适应轨迹跟踪控制方法。结合快速终端滑模控制策略和自适应技术, 保证了跟踪误差在外界扰动和参数不确定性情况下收敛到一个任意小的区域内。最后, 稳定性分析和仿真实验证明了本方法的有效性, 这为不确定轮式移动机器人的轨迹跟踪控制研究提供了一种新的方法。

参考文献:

- [1] SHOJAEI K, SHAHRI A M, TARAKAMEH A. Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in presence of parametric and nonparametric uncertainties[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(1): 194-204.
- [2] ZENG W, WANG Q H, LIU F L, et al. Learning from adaptive neural network output feedback control of a unicycle-type mobile robot[J]. ISA Transactions, 2016, 61: 337-347.
- [3] XIN L J, WANG Q L, SHE J H, et al. Robust adaptive tracking control of wheeled mobile robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2016, 78: 36-48.
- [4] BAYAT F, MOBAYEN S, JAVADI S. Finite-time

- tracking control of n th-order chained-form non-holonomic systems in the presence of disturbances[J]. ISA Transactions, 2016, 63: 78-83.
- [5] 沈艳军, 胡俊波. 一类非线性系统连续非光滑自适应观测器设计[J]. 广西科学, 2015, 22(4): 421-424.
SHEN Y J, HU J B. Continuous but nonsmooth adaptive observer design for a class of nonlinear systems [J]. Guangxi Sciences, 2015, 22(4): 421-424.
- [6] CHEN W H, YANG W, ZHENG W X. Adaptive impulsive observers for nonlinear systems: Revisited[J]. Automatica, 2015, 61: 232-240.
- [7] HUANG J S, WEN C Y, WANG W, et al. Adaptive stabilization and tracking control of a nonholonomic mobile robot with input saturation and disturbance [J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(3): 234-241.
- [8] 黎艳, 陈武华. 具有饱和执行器的不确定脉冲系统的鲁棒镇定[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2013, 49(6): 10-15.
LI Y, CHEN W H. Robust stabilization of uncertain impulsive systems with saturating actuator[J]. Journal of Northwest Normal University: Natural Science, 2013, 49(6): 10-15.
- [9] PARK B S, YOO S J, PARK J B, et al. A simple adaptive control approach for trajectory tracking of electrically driven nonholonomic mobile robots[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2010, 18(5): 1199-1206.
- [10] HOU Z G, ZOU A M, CHENG L, et al. Adaptive control of an electrically driven nonholonomic mobile robot via backstepping and fuzzy approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, 17(4): 803-815.
- [11] HWANG C L, WU H M. Trajectory tracking of a mobile robot with frictions and uncertainties using hierarchical sliding-mode under-actuated control[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(7): 952-965.
- [12] DO K D, PAN J. Global output-feedback path tracking of unicycle-type mobile robots[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2006, 22(2): 166-179.
- [13] WANG Z P, GE S S, LEE T H. Adaptive neural network control of a wheeled mobile robot violating the pure nonholonomic constraint[C]//Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Nassau, Bahamas: IEEE, 2004: 5198-5203.
- [14] ZHU X C, DONG G H, CAI Z X, et al. Robust simultaneous tracking and stabilization of wheeled mobile robots not satisfying nonholonomic constraint[J]. Journal of Central South University of Technology, 2007, 14(4): 537-545.
- [15] BUCCIERI D, PERRITAZ D, MULLHAUPT P, et al. Velocity-scheduling control for a unicycle mobile robot: Theory and experiments[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(2): 451-458.
- [16] OU M Y, SUN H B, LI S H. Finite time tracking control of a nonholonomic mobile robot with external disturbances [C]//31st Chinese Control Conference (CCC). Hefei: IEEE, 2012: 853-858.
- [17] NAVIN C P, MIJA S J. Robust controller for trajectory tracking of a Mobile Robot[C]//IEEE International Conference on Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES). Delhi: IEEE, 2016: 1-6.
- [18] 李娜, 王汝凉, 陈超洋. 基于神经网络的一类非仿射非线性系统的 H^∞ 控制[J]. 广西科学, 2010, 17(4): 328-331.
LI N, WANG R L, CHEN C Y. Robust H^∞ control for a class of non-affine nonlinear systems with time-delay based on neural networks[J]. Guangxi Sciences, 2010, 17(4): 328-331.
- [19] BOUKENS M, BOUKABOU A. Design of an intelligent optimal neural network-based tracking controller for nonholonomic mobile robot systems [J]. Neurocomputing, 2017, 226: 46-57.
- [20] LU K F, XIA Y Q. Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence[J]. Automatica, 2013, 49(12): 3591-3599.
- [21] KHALIL H K. Nonlinear systems[M]. 3rd edition. New York: Prentice-Hall, 2002.

(责任编辑: 陆雁)