

基于格子流体力学模型的交通拥堵反馈控制方法比较* Comparison of Feedback Control Schemes for Traffic Jam Based on Lattice Hydrodynamic Traffic Model

李瑞鑫,郭言,薛郁**,施映

LI Ruixin, GUO Yan, XUE Yu, SHI Ying

(广西大学物理科学与工程技术学院,广西南宁 530004)

(College of Physical Science and Engineering, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:【目的】寻找抑制拥堵、控制交通排放的可行方案。【方法】在交通流格子流体力学模型的基础上,考虑道路上所有车流对当前车流的作用,构造平均场反馈控制方法;考虑最近邻单元车流量差的正弦变化,提出非线性正弦反馈控制方法,并通过线性分析得出其稳定性条件。最后通过数值模拟验证,对比这两种反馈控制方法,以及考虑最近邻单元流量差的 Ge 反馈控制方法和考虑下游车流流量差的 Redhu 和 Gupta 延时反馈控制方法对抑制交通拥堵的作用。【结果】4 种控制方法都能抑制交通拥堵。从数值模拟结果看,控制效果较好为平均场反馈控制方法、非线性正弦反馈控制方法和 Ge 反馈控制方法;从实际应用的角度来看,非线性正弦反馈控制方法、Ge 反馈控制方法及 Redhu 和 Gupta 延时反馈控制方法比较容易实现。【结论】控制效果较好且较容易实现的方法为非线性正弦反馈控制方法和 Ge 反馈控制方法。

关键词:格子流体力学交通模型 平均场理论 反馈控制方法 稳定性条件 数值模拟

中图分类号:U491 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2016)03-0206-06

Abstract:【Objective】Looking for the feasible solution to suppress traffic jams and control traffic emission. 【Methods】The mean-field feedback control scheme on lattice hydrodynamic traffic equation is constructed by considering an average effect exerting on traffic flow on road. The nonlinear feedback control scheme is proposed via considering the sine variation of the flow difference value on the nearest-neighbor unit on grid as control term. The stability condition is obtained by stability analysis. By simulation analysis, four control effects for the mean-field feedback control scheme, the nonlinear feedback control scheme, Ge's feedback control scheme and Redhu and Gupta's delay feedback control model are compared. 【Results】All of studies indicated that the four schemes can suppress traffic jams effectively. From results of numerical simulations, the mean-field feedback control scheme, nonlinear feedback control scheme and Ge's feedback control scheme have the better control effects. In the practical application, non-

linear feedback control scheme, Ge's feedback control scheme and Redhu and Gupta's delay feedback control model are easily realized. 【Conclusion】The nonlinear sine feedback control scheme and Ge's feedback control scheme reveal better control effects and easier to realize suppressing traffic jams.

Key words: lattice hydrodynamic traffic model, mean-field, feedback control scheme, stability condition, numerical simulation

收稿日期:2016-05-24

作者简介:李瑞鑫(1994-),女,研究生,主要从事凝聚态与计算物理研究。

* 国家自然科学基金项目(11262003),广西自然科学基金项目(20140593)和广西研究生创新项目(YCSZ2012013)资助。

** 通讯作者:薛郁(1963-),男,博士生导师,教授,主要从事交通流动力学研究,E-mail:yuxuegxu@gxu.edu.cn.

0 引言

【研究意义】随着社会的发展,城市化进程的加快,汽车数量日益增多,交通拥堵日趋严重,给人们工作、生活以及出行带来很大影响,车辆排放的 PM2.5 造成环境极大污染^[1]。在城市问题愈演愈烈的形势下,科学家们一直在寻找抑制拥堵、控制交通排放的可行方案^[2]。【前人研究进展】在研究问题时,为了描述交通状况和拥堵的形成转化过程,研究人员们提出了多种交通流模型,从微观的跟驰模型,元胞自动机模型^[3-4]等,到宏观的流体力学模型。Nagatani^[5-6]借鉴交通流流体动力学模型和优化速度模型的特点提出来的格子流体力学模型属于宏观流体力学模型的一种,该模型通过非线性分析导出 modified Korteweg-de Vries (mKdV) 方程描述的阻塞密度波和非平衡相变的 Ginzburg-Landau 方程(TDGL 方程)。在 Nagatani 的格子流体力学模型的基础上,人们做了大量的改进,得到了许多新的格子流体力学模型,并通过加入控制项,得出不同的控制方法。其中 Kang 和 Sun^[7]研究了驾驶员的延迟作用,发现其有明显的疏导交通作用;Peng 等^[8-10]考虑驾驶员的预测能力、记忆力等影响因素,提出新的格子流体力学模型;通过考虑车道宽度的边缘效应因素,提出了车道宽度的交通格子流体力学模型。Tang 等^[11-12]考虑个体感知能力的差异对交通拥堵的影响,并且研究汽车鸣笛声对车流稳定性的作用。Ge 等^[13-15]研究证明驾驶员的“后视”行为对稳定交通具有显著的作用,并通过在格子流体力学方程中加入最近邻车流变化的反馈控制项,提出了可以缓解交通拥堵的反馈控制方法。Gupta 和 Redhu^[16-17]分析了驾驶者的前瞻行为,发现其可以在一定程度上缓解交通拥堵,并在格子流体力学方程中加入下游前后时间的流量差作为反馈控制信号,提出延时反馈控制方法。【本研究切入点】为了得到更为接近实际交通状况的控制方法,考虑所有车辆对当前车影响的平均效果,我们引入车流的平均场,将其作为格子流体力学方程中的反馈控制项,通过数值模拟验证其抑制交通拥堵的效果。【拟解决的关键问题】通过比较 4 种反馈控制方法对抑制交通拥堵的控制效果,获得控制效果较好的反馈控制方法。

1 平均场反馈控制方法

Nagatani^[5]在 1998 年提出的格子流体力学模型的控制方程为

$$\partial_t \rho_j + \rho_0 (\rho_j v_j - \rho_{j-1} v_{j-1}) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t \rho_j v_j = a \rho_0 V(\rho_{j+1}) - a \rho_j v_j, \quad (2)$$

式中 $V(\rho)$ 为优化速度函数:

$$V(\rho) = \frac{V_{\max}}{2} \left[\tanh \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_c} \right) + \tanh \left(\frac{1}{\rho_c} \right) \right], \quad (3)$$

考虑第 j 单元的流量: $q_j = \rho_j v_j$, 在 Nagatani 的模型中忽略了除最近邻车流以外其他车流的作用^[5], 但其他近邻的车流也存在影响。文献[18]除考虑最近邻车辆作用外,还增加了次近邻车流的影响,而文献[19]除考虑最近邻车辆作用外,还考虑前方 n 辆车的影响。平均场反馈控制法考虑所有车辆对当前车影响的平均效果,于是得到如下方程:

$$\partial_t \rho_{j+1} + \rho_0 (q_{j+1} - q_j) = 0, \quad (4)$$

$$\partial_t q_j = a [\rho_0 V(\rho_{j+1}) - q_j] + ak \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n q_i - q_j \right], \quad (5)$$

其中 $a = \frac{1}{\tau}$ 为驾驶者的敏感度, k 为反馈控制增益,

通过改变 k 值可以调整控制强度, $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n q_i$ 就是道路平均场流量的控制项, ρ_0 是初始密度, ρ_{j+1} 是在 t 时刻,位置 $j+1$ 处的密度, n 为车辆数。

对平均场模型进行数值模拟,在周期性边界条件下,其对应于一条由 140 个离散的格子单元组成的环形路,跟踪第 2, 25, 50, 80 格子单元中车流密度随时间的变化。相关参数为车辆最大行驶速度 $v_{\max} = 2$, 敏感度 $a = 2.1$, 初始密度 $\rho_0 = 0.25$ 。并且假设从第 50 到第 55 格子单元的密度为 0.5, 在第 56 到第 60 格子单元的密度为 0.2, 分别取反馈控制增益 $k = 0.0, 0.3, 0.5, 0.7$ 。数值模拟得出如图 1 的密度-时间关系图。

从图 1a 可以明显发现,在 0~350 s 时间段内,车辆密度随时间的变化较大,而由图 1b~d 可知,反馈控制增益 k 从 0.3 到 0.7 时,曲线波动变化很小。当反馈控制增益 $k = 0.5$ 时,在长时间内(20 100~20 300 s),车辆密度没有变化,车流的控制稳定效果很好(图 1e)。为了深入了解控制效果,在时间 0~1 000 s 时,绘制第 55 格子单元 1 s 时间间隔前后的车流密度差 $\rho_{55}(\tau) - \rho_{55}(\tau-1)$ 和车流密度 $\rho_{55}(\tau)$ 的相空间点的分布图(图 2)。

从图 2a 可以看出,离散的对应该点的分布状态呈现出交通滞后效应,且当 $k = 0.0$ 时第 55 格子单元处的车流密度波动极大,反映了交通流运动状态非常不稳定,造成交通拥堵,而在图 2b 中可以看出,在加上 $k = 0.5$ 的控制后,交通滞后区域明显缩小,表明前后时间车流密度的变化范围较小,纵向车流密度差

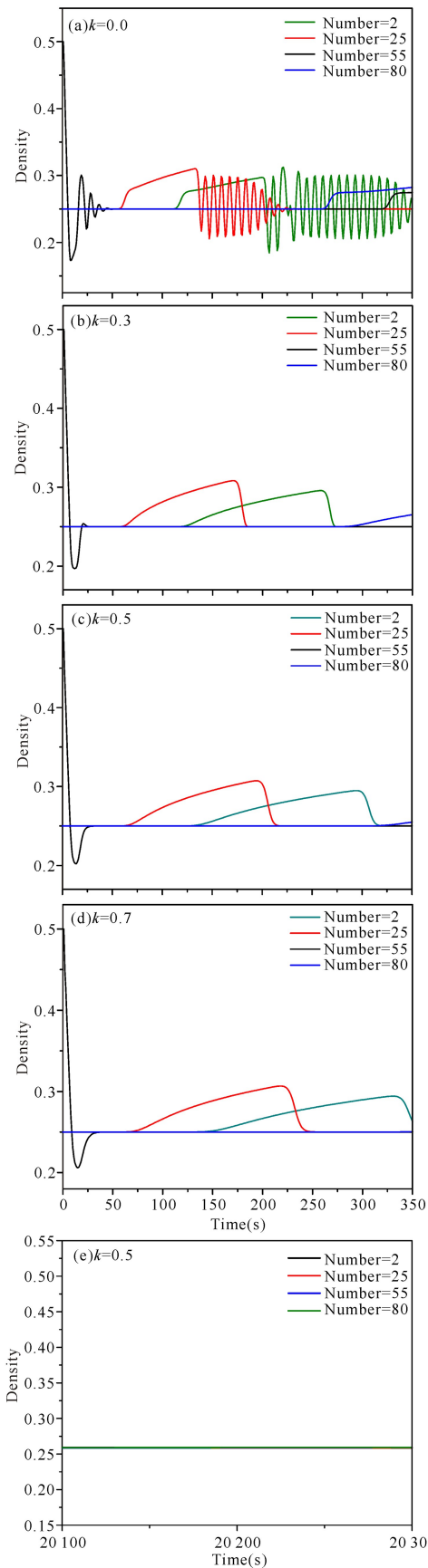


图1 在平均场反馈控制方法中车辆密度随时间的变化
Fig. 1 Temporal density change with time in mean-field feedback control scheme

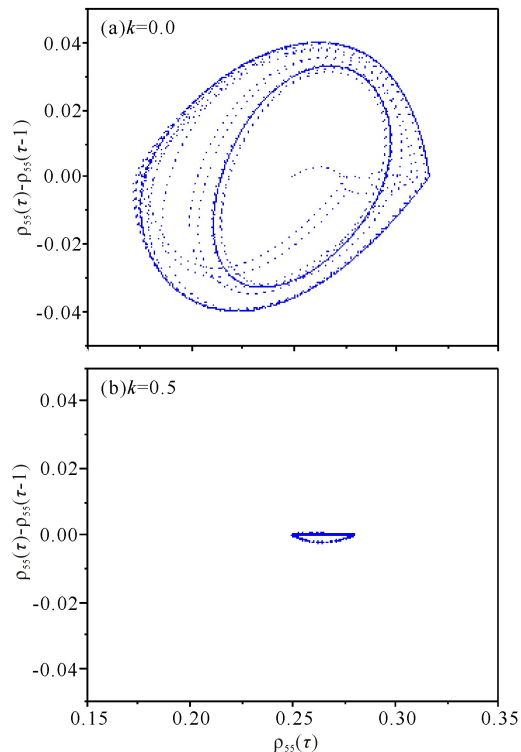


图2 平均场反馈控制法分析第55格子单元车流密度差随其密度变化的结果

Fig. 2 Difference of density between τ and $\tau - 1$ at 55th grid point analyzes by mean-field feedback control scheme

值 $\rho_{55}(\tau) - \rho_{55}(\tau - 1)$ 近似在 0 的附近变化, 交通滞后区域明显缩小, 呈现出单一的周期态, 交通流趋于稳定, 抑制交通拥堵。

2 非线性正弦反馈控制方法

为了研究非线性效应, 我们考虑最近邻单元车流量差按照正弦变化, 作为非线性控制项, 得出如下非线性控制模型:

$$\partial_t \rho_{j+1} + \rho_0 (q_{j+1} - q_j) = 0, \quad (6)$$

$$\partial_t q_j = a [\rho_0 V(\rho_{j+1}(t)) - q_j] + ak \sin(q_{j+1} - q_j). \quad (7)$$

对模型进行稳定性分析:

当车流处于微扰条件下, 非线性项可化为如下形式:

$$\sin(q^* + q_{j+1}^0 - q^* - q_j^0) = q_{j+1}^0 - q_j^0, \quad (8)$$

$$q_j^0 = q_j - q^*, \Gamma(\rho^*) = \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho^*}, \rho_j^0 = \rho_j - \rho^*, \quad (9)$$

其中 q^*, ρ^* 分别为平衡态下的流量和密度, q_j^0 为微扰, $V(\rho_{j+1}(t))$ 经过泰勒展开得

$$V(\rho_{j+1}(t)) = V(\rho^* + \rho_{j+1}^0(t)) = V(\rho^*) + \Gamma(\rho^*)(\rho_{j+1}^0(t)). \quad (10)$$

则方程(7) 转化为

$$\partial_t \rho_j^0 = a[\rho_0 \Gamma(\rho^*) \rho_{j+1}^0 - q_j^0] + ak[q_{j+1}^0 - q_j^0], \quad (11)$$

由拉普拉斯变换得

$$sP_{j+1}(s) - \rho_{j+1}(0) + \rho_0(Q_{j+1}(s) - Q_j(s)) = 0, \quad (12)$$

$$sQ_j(s) - q_j(0) = a\{\rho_0 \Gamma(\rho^*)P_{j+1}(s) - Q_j(s)\} + ak[Q_{j+1}(s) - Q_j(s)], \quad (13)$$

式中 $L(q_j^0) = Q(s)$, $L(\rho_j^0) = P_j(s)$, $L(\partial_t \rho_j^0) = sP_j(s) - \rho_j(0)$, 其中 L 表示拉普拉斯变换, s 是复数频率, 则(12)和(13)式合并得

$$Q_j(s) = \left(\frac{-a\rho_0^2 \Gamma(\rho^*) + aks}{s^2 - a\rho_0^2 \Gamma(\rho^*) + as + aks} \right) Q_{j+1}(s) + \frac{a\rho_0 \Gamma(\rho^*) \rho_{j+1}(0)}{d(s)} + \frac{s}{d(s)} q_j(0), \quad (14)$$

其中:

$$d(s) = s^2 + as + aks - a\rho_0^2 \Gamma(\rho^*), \quad (15)$$

$$G(s) = \frac{-a\rho_0^2 \Gamma(\rho^*) + aks}{s^2 - a\rho_0^2 \Gamma(\rho^*) + as + aks}, \quad (16)$$

此处 $d(s)$ 是特征多项式, $G(s)$ 为转化函数。研究发现, 当 $d(s)$ 稳定, 并且当 $s \rightarrow \infty$ 时, $G(s) \leq 1$, 即交通流稳定, 不发生拥堵, 按照 Hurwitz 的稳定性判据, 当各项符号相同时, $d(s)$ 稳定^[20]。而在方程(15)中, 敏感度 a 为正值, $\Gamma(\rho^*) < 0$, 各项符号相同则 $d(s)$ 稳定。以 $j\omega$ 代 s 求范数得

$$\|G(j\omega)G(-j\omega)\| \leq 1, \quad (17)$$

则解得稳定性条件为

$$a > -\frac{2\rho_0^2 \Gamma(\rho^*)}{1 + 2k} \quad (18)$$

类似对控制方程(4)和(5)进行数值模拟的方法, 模拟选取的参数与平均场模型的一致, 模拟得出的第 2, 25, 50, 80 格子单元中车流密度随时间的变化如图 3 所示。

从图 3a~d 可以发现, 以上下游车流流量差作为反馈控制能有效控制交通拥堵, 其控制效果与平均场反馈控制的效果一致, 第 2, 25, 50, 80 格子单元中车流密度随时间的变化与平均场反馈控制的情形一致。同样地, 在时间取 0~1 000 s 时, 以第 55 格子单元前后时间间隔 1 s 的密度差 $\rho_{55}(\tau) - \rho_{55}(\tau - 1)$ 随第 55 格子单元 $\rho_{55}(\tau)$ 的密度的变化, 从相空间中反映控制的作用效果。

从图 4 可以看到, 非线性正弦反馈控制方法的控制效果出现类似平均场反馈控制方法的交通滞后曲线, 在施加反馈控制后, 交通滞后区域明显缩小, 呈现出单一的周期态, 交通流趋于稳定, 较好地抑制了交通拥堵。

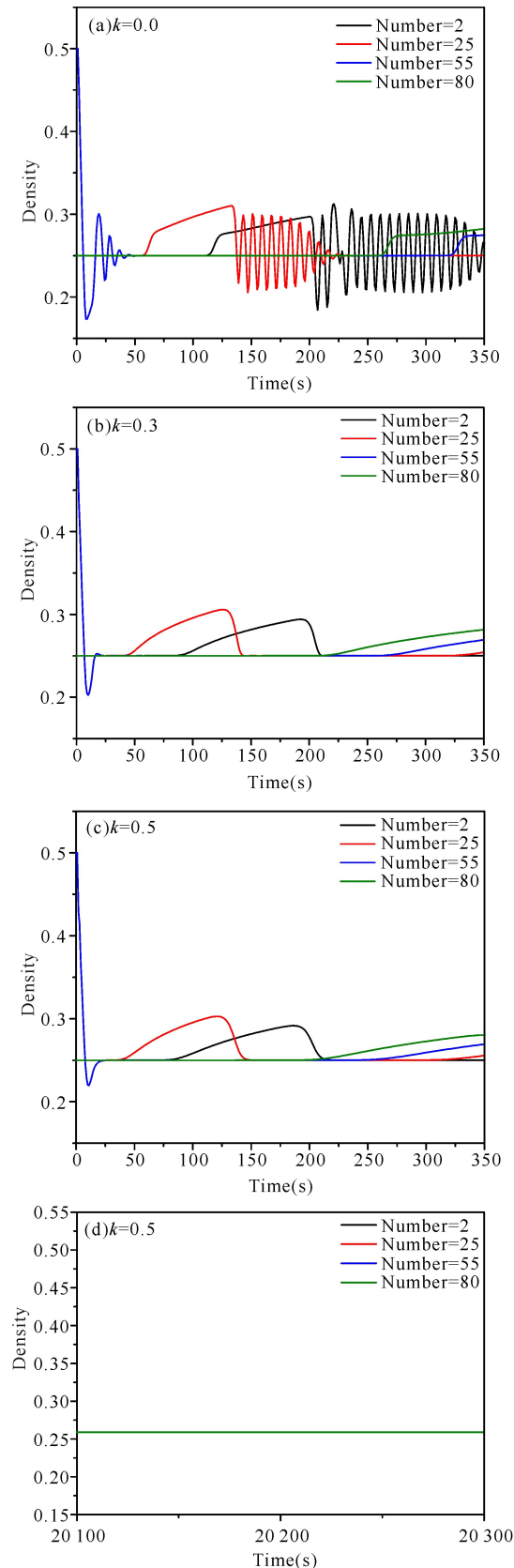


图 3 在非线性正弦反馈控制方法中车辆密度随时间的变化

Fig. 3 Temporal density change with time in nonlinear sine feedback control scheme

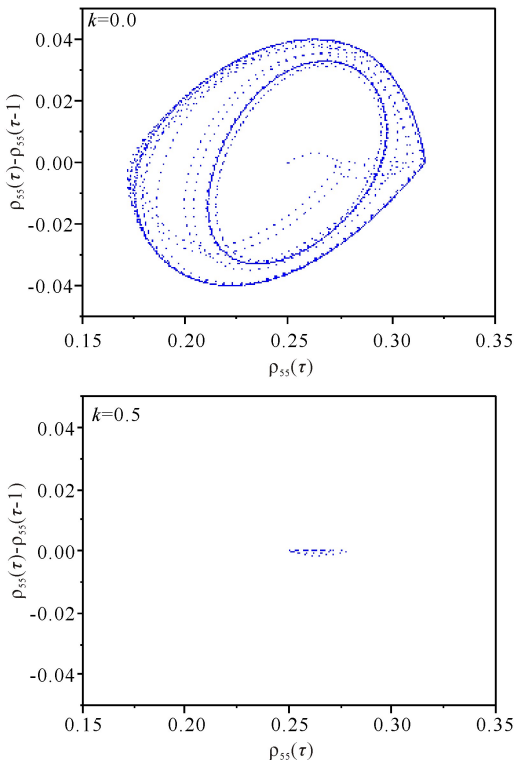


图4 非线性正弦反馈控制法分析第55格子单元车流密度差随其密度变化的结果

Fig. 4 Difference of density between τ and $\tau - 1$ at 55th cell analyzed by nonlinear sine feedback control scheme

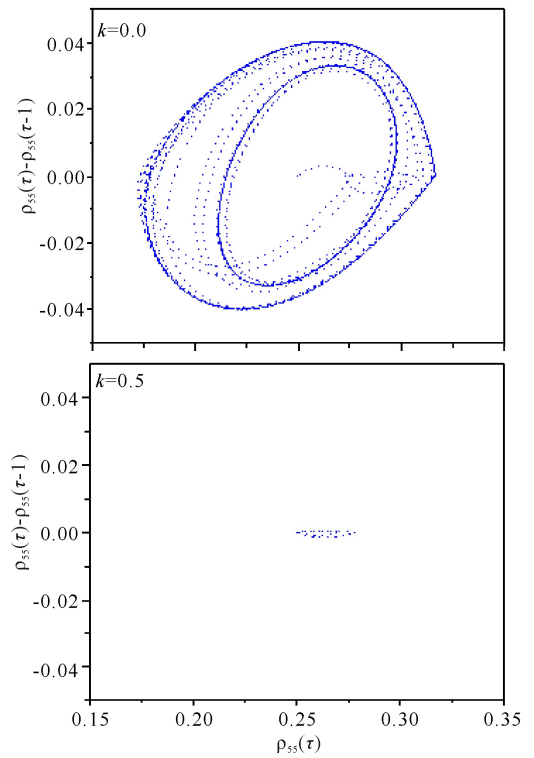


图5 Ge反馈控制法分析第55格子单元车流密度差随其密度变化的结果

Fig. 5 Difference of density between τ and $\tau - 1$ at 55th cell analyzed by Ge's feedback control scheme

3 Ge 反馈控制方法

在 Nagatani 格子流体力学模型的基础上, Ge 等^[15]考虑最近邻单元流量差作为反馈控制项, 提出 Ge 反馈控制方法, 其控制方程如下:

$$\partial_t \rho_{j+1} + \rho_0 (q_{j+1} - q_j) = 0, \quad (19)$$

$$\partial_t q_j = a \rho_0 V(\rho_{j+1}) - a q_j + u_j, \quad (20)$$

其中 u_j 是通过上下游车流的流量差表示的控制项, 即 $u_j = k(q_{j+1} - q_j)$, 其中, k 为反馈控制增益, 经过线性稳定性分析, Ge 等^[15]得到稳定性条件:

$$2\rho_0^2 \Lambda + a + 2k > 0, \quad (21)$$

其中 $\Lambda = \frac{\partial V}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho^*}$, ρ^* 表示稳态密度。

为了反映控制效果, 对控制方程(19)和(20)进行数值模拟, 模拟参数与平均场模型的一致。在相空间中可以反映出控制的作用效果是第55格子单元前后时间间隔1s时的密度差 $\rho_{55}(\tau) - \rho_{55}(\tau - 1)$ 随第55格子单元 $\rho_{55}(\tau)$ 的密度的变化结果。显然, Ge 反馈控制方法的控制效果与平均场反馈控制方法类似, 施加反馈控制以后交通滞后区域明显缩小, 呈现出单一的周期态, 交通流趋于稳定, 较好地抑制了交通拥堵(图5)。

4 Redhu 和 Gupta 延时反馈控制方法

Redhu 和 Gupta^[17]在 Nagatani 格子流体力学模型的基础上, 考虑下游最近邻格子单元在时间间隔 τ 前后流量差作为反馈控制项, 提出 Redhu 和 Gupta 延时反馈控制方法, 其控制方程如下:

$$\partial_t \rho_{j+1} + \rho_0 (q_{j+1} - q_j) = 0, \quad (22)$$

$$\partial_t q_j = a[\rho_0 V(\rho_{j+1}) - q_j] + ak[q_{j+1}(t) - q_{j+1}(t - \tau)], \quad (23)$$

其中 k 为反馈控制增益, τ 为延时时间。Redhu 和 Gupta^[17]通过线性稳定性分析, 得到如下的稳定性条件:

$$a > \frac{2\rho_0^2 \Gamma(\rho^*)}{1 + 2k + 2\rho_0^2 \Gamma(\rho^*) t_d}. \quad (24)$$

同样, 对控制方程(22)和(23)进行数值模拟, 模拟选取的参数与平均场模型的一致。图6显示施加 Redhu 和 Gupta 延时反馈控制的控制效果。显然, Redhu 和 Gupta 延时反馈控制方法的控制效果与平均场反馈控制方法类似, 施加反馈控制以后交通滞后区域明显减小, 交通流趋于稳定, 抑制了交通拥堵。但是, 在缩小区域还明显存在交通滞后曲线, 交通滞后区域没有呈现出单一的周期态, 因此, 下游车流流量差延迟反馈控制效果不是很好。

参考文献:

- [1] 盘薇,薛郁,卢伟真,等. 城市交叉路口车辆排放颗粒物浓度的时间相关性分析[J]. 广西科学, 2015, 22(4): 373-381.
PAN W, XUE Y, LU W Z, et al. Time-correlation analysis of particulate matter from vehicular emissions at urban traffic intersection[J]. Guangxi Sciences, 2015, 22(4): 373-381.
- [2] 戴喜生,杨峰,郭亚君,等. 快速路交通流常微分模型的PD型迭代学习控制[J]. 广西科技大学学报, 2014, 25(3): 21-25, 31.
DAI X S, YANG F, GUO Y J, et al. PD-type iterative learning control for freeway traffic flow ordinary differential equation model[J]. Journal of Guangxi University of Science and Technology, 2014, 25(3): 21-25, 31.
- [3] 韦兰香,梁玉娟. 收费站对高速公路交通流能耗的影响[J]. 广西科学, 2016, 23(1): 92-96.
WEI L X, LIANG Y J. Study on the influence of toll-booth on highway traffic flow's energy loss[J]. Guangxi Sciences, 2016, 23(1): 92-96.
- [4] 刘泽高,陈栋,薛郁. 多出口室内行人出口选择行为研究[J]. 广西科学, 2015, 22(4): 388-394.
LIU Z G, CHEN D, XUE Y. Behavior study on exit choice of indoor pedestrians in multiple exits[J]. Guangxi Sciences, 2015, 22(4): 388-394.
- [5] NAGATANI T. Modified KdV equation for jamming transition in the continuum models of traffic[J]. Physica A, 1998, 261: 599-607.
- [6] NAGATANI T. Jamming transition in traffic flow on triangular lattice[J]. Physica A, 1999, 271: 200-221.
- [7] KANG Y R, SUN D H. Lattice hydrodynamic traffic flow model with explicit drivers physical delay[J]. Nonlinear Dyn, 2013, 71(3): 531-537.
- [8] PENG G H, CAI X H. A new lattice model of traffic flow with the consideration of the driver's forecast effects[J]. Phys Lett A, 2011, 375: 2153-2160.
- [9] PENG G H, CAI X H, CAO B F, et al. Non-lane-based lattice hydrodynamic model of traffic flow considering the lateral effects of the lane width[J]. Phys Lett A, 2011, 375: 2823-2827.
- [10] PENG G H. A driver's memory lattice model of traffic flow and its numerical simulation[J]. Nonlinear Dyn, 2012, 67: 1811-1815.
- [11] TANG T Q, LIC Y, HUANG H J, et al. A new fundamental diagram theory with the individual difference of the drivers' perception ability[J]. Nonlinear Dyn, 2012, 67: 2255-2265.

(下转第 215 页 Continue on page 215)

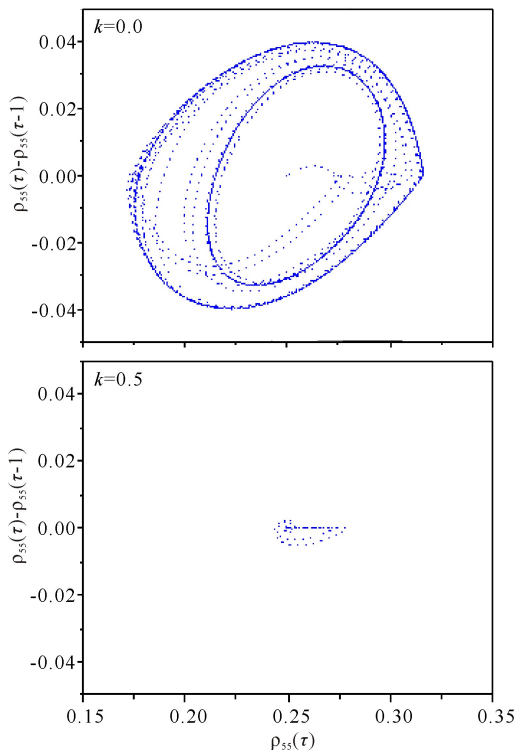


图6 Redhu和Gupta延时反馈控制法分析第55格子单元车流密度差随其密度变化的结果

Fig. 6 Difference of density between τ and $\tau - 1$ at 55th cell analyzed by Redhu and Gupta's feedback control scheme

5 结论

本研究基于交通流格子流体力学模型,通过数值模拟验证和对比4种反馈控制方法对抑制交通拥堵的作用。通过线性稳定性分析,得出非线性正弦反馈控制方法的稳定性条件;通过数值模拟,在相图上对比4种反馈控制方法的交通滞后曲线。结果表明:在未施加控制时,交通拥堵形成过程中出现混沌态的交通滞后区域;在施加控制时,交通滞后区域显著的缩小,呈现出周期态。说明4种控制方法都能抑制交通拥堵。依据交通滞后区域缩小的尺寸及呈现出的周期态是否为单一的,对比抑制交通拥堵的控制效果,结果发现控制效果较好为平均场反馈控制方法、考虑最近邻单元车流量差的非线性正弦反馈控制方法和最近邻车流量差的Ge反馈控制方法,而考虑下游车流量差的Redhu和Gupta延时反馈控制方法由于出现非单一的周期态,其控制效果不甚理想。然而从实际应用的角度来看,平均场控制模型需要获得每一个位置的流量信息,在实际交通中比较难实现,而非线性正弦反馈控制方法和Ge反馈控制方法只需要获得最近邻车流的信息,Redhu和Gupta延时反馈控制方法也只需要下游的车流量信息。因此,结合控制效果和实际应用来看,非线性正弦反馈控制方法和

- [3] JOHNSON A, RYDE H, SZTARKIER J. Evidence of a singularity in the nuclear rotation band structure[J]. Physics Letters B, 1971, 34: 605-608.
- [4] REGAN P H, BEAUSANG C W, ZAMFIR N V, et al. Signature for vibrational to rotational evolution along the yrast line[J]. Physical Review Letters, 2003, 90(15): 152502.
- [5] REGAN P H, WHELDON C, YAMAMOTO A D, et al. Vibrational and rotational sequences in ^{101}Mo and $^{103,4}\text{Ru}$ studied via multinucleon transfer reactions[J]. Acta Physica Polonica B, 2005, 36: 1313-1322.
- [6] SHEN S F, CHEN Y B, XU F R, et al. Signature for rotational to vibrational evolution along the yrast line[J]. Physical Review C, 2007, 75: 047304.
- [7] ROUX D G, FETEA M S, GUEORGUIEVA E, et al.

Signature splitting and quasiparticle alignment in the yrast band of ^{165}Ta [J]. Physical Review C, 2001, 63: 024303.

- [8] CARLSSON H, BERGSTRÖM H, BROCKSTEDT A, et al. Back-bending in the $\pi_{i_{13/2}}$ band and proton-neutron interactions in ^{171}Re [J]. Nuclear Physics A, 1993, 551(2): 295-320.
- [9] BENGTTSSON R, FRAUENDORF S. Quasiparticle spectra near the yrast line[J]. Nuclear Physics A, 1979, 327: 139-146.
- [10] ZHU S, GARG U, AFANASJEV A V, et al. Investigation of antimagnetic rotation in ^{100}Pd [J]. Physical Review C, 2001, 64: 041302.

(责任编辑:竺利波)

(上接第 211 页 Continue from page 211)

- [12] TANG T Q, LI C Y, WU Y H, et al. Impact of the Honk effect on the stability of traffic flow[J]. Phys A, 2011, 390: 3362-3368.
- [13] GE H X, CHENG R J. The "backward looking" effect in the lattice hydrodynamic model[J]. Phys A, 2008, 387: 6952-6958.
- [14] GE H X, ZHENG P J, LO S M, et al. TDGL equation in lattice hydrodynamic model considering driver's physical delay[J]. Nonlinear Dyn, 2014, 76: 441-445.
- [15] GE H X, CUI Y, ZHU K Q, et al. The control method for the lattice hydrodynamic model[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2015, 22: 903-908.
- [16] GUPTA A K, SHARMA S, REDHU P. Effect of multi-phase optimal velocity function on jamming transition in a lattice hydrodynamic model with passing[J]. Nonlinear Dyn, 2015, 80: 1091-1108.
- [17] REDHU P, GUPTA A K. Delayed-feedback control in a

lattice hydrodynamic model[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2015, 27: 263-270.

- [18] 薛郁. 优化车流的交通流格子模型[J]. 物理学报, 2004, 53(1): 25-30.
- XUE Y. Lattice models of the optimal traffic current [J], Acta Phys Sin, 2004, 53(1): 25-30.
- [19] GE H X, DAI S Q, XUE Y, et al. Stabilization analysis and modified Korteweg-de Vries equation in a cooperative driving system[J]. Physical Review E, 2005, 71: 66119-66125.
- [20] JIN Y, HU H. Stabilization of traffic flow in optimal velocity model via delayed-feedback control[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2013, 18: 1027-1034.

(责任编辑:陆雁)