

线性奇异脉冲系统的稳定性分析*

Stability Analysis of Linear Singular Impulsive Systems

陈武华¹, 蒋仁宏¹, 杨宣访²

CHEN Wu-hua¹, JIANG Ren-hong¹, YANG Xuan-fang²

(1. 广西大学数学与信息科学学院, 广西南宁 530004; 2. 海军工程大学, 电气与信息工程学院, 湖北武汉 430033)

(1. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. College of Electrical and Information Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei, 430033, China)

摘要: 奇异脉冲系统是一类不连续的奇异系统, 其状态在一系列离散时刻发生跳变。为充分刻画离散脉冲作用下奇异系统状态不连续的动态特征, 提出基于时变 Lyapunov 函数的稳定性分析方法。通过运用此方法, 并借助于凸组合技术, 建立了一类奇异脉冲系统指数稳定性的充分条件。该稳定性条件以线性矩阵不等式形式给出, 定量地揭示了脉冲区间及脉冲强度对系统稳定性影响。最后, 用一个数值算例验证了所得结果的有效性。

关键词: 奇异脉冲系统 时变 Lyapunov 函数 指数稳定性 凸组合技术

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2015)04-0416-05

Abstract: Singular impulsive systems are a class of discontinuous singular systems where the state experiences jump at certain discrete instants. To fully characterize the discontinuous dynamical feature of the system state under the impulse action, a method based on time-varying Lyapunov function is proposed for stability analysis. A sufficient condition for exponential stability of linear singular impulsive systems is established by applying this method integrated with the technique of convex combination. The derived stability condition is expressed in terms of linear matrix inequalities, which quantitatively reveal the effects of impulsive intervals and impulse strength on system stability. Finally, a numerical example demonstrates the effectiveness of the obtained results.

Key words: singular impulsive system, time-varying Lyapunov function, exponential stability, convex combination technique

0 引言

在生物、经济、控制领域和实际工程中, 经常会遇

到一类特殊的系统, 该系统同时包含离散事件系统和连续变量系统, 系统的变化由时间和事件共同决定。系统的状态包括连续状态和离散状态, 且可由基于连续变量的运动方程和基于离散变量的运动方程描述。其状态在服从连续系统运动规律的前提下, 在某些单点时刻会因事件驱动发生改变, 两者相互协作形成复杂的运动形式, 学者们称含有此类运动形式的系统为脉冲系统。在自然界和工程领域中, 存在着大量脉冲现象, 如生物的心脏跳动、血液循环、脉搏频率调节, 以及生物种群的生长, 神经网络系统等。脉冲系统的

收稿日期: 2015-06-15

作者简介: 陈武华(1967-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事混杂系统的分析与综合研究。

* 国家自然科学基金项目(61164016), 广西自然科学基金重点项目(2013GXNSFDA019003)和广西自然科学基金项目(2011GXNSFA018141)资助。

理论与应用的研究越来越受到学者们的重视,并且取得了丰富的成果^[1~5].

自从英国学者 Rosenbrock 在电网络控制系统的研究^[6]中提出奇异系统以来,该系统在电路^[7]、机器人^[8]、飞机模型^[9]、社会生物学和多部门经济系统^[10]等领域得到广泛的应用. 奇异系统,是指具有刚性约束的微分系统或若干微分关系式和函数关系式耦合的系统,又称广义状态空间系统、描述变量系统或半状态系统. 关于奇异系统的处理过程可参考文献^[11~13]. 它的数学描述一般形式为 $E\dot{x} = Ax + Bu$, 与正则系统的区别在于 E 是一个奇异方阵. 两系统的本质特征为奇异系统含有脉冲模, 或者从传递函数的观点来说, 无穷远点是奇异系统的零点, 这是其结构上的独特之处. 20 世纪 70 年代后, 在奇异线性系统解的存在性、脉冲能控性和脉冲能观测性、稳定性、正常观测器设计、闭环系统综合、二次最优控制以及状态估计问题等方面已有了大量的研究成果. 应该指出的是, 奇异系统的稳定性问题比正常系统的稳定性问题要复杂很多^[14], 因为它不仅包含正则系统具有的指数解以及有穷远点, 而且还包含脉冲解、静态解以及无穷远点. 而且, 对奇异系统而言齐次初值问题的解可能是不相容的, 如果相容, 其解的形式也不一定唯一.

许多奇异系统都具有脉冲行为, 其状态会在特定的时刻发生改变. 因奇异系统和脉冲系统在许多相同的领域中都有重要应用, 所以对具有脉冲作用的奇异性系统的研究具有现实意义. 文献^[15]研究奇异系统的一些性质及其与奇异脉冲系统的稳定性等价关系; 文献^[16]研究奇异随机混杂动力系统的鲁棒稳定和镇定; 文献^[17]讨论切换线性连续时间奇异系统的稳定性问题; 文献^[18]介绍奇异脉冲系统解的构造和稳定性; 文献^[19]通过切换控制研究奇异脉冲系统的稳定性、鲁棒镇定以及 H_∞ 控制; 文献^[20]讨论线性时变奇异脉冲系统的有限时间稳定; 文献^[21]研究具有不确定扰动的奇异脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制. 注意到, 文献^[19, 21]在系统稳定性分析时主要采用时不变 Lyapunov 函数分析方法, 文献^[20]则应用时变的 Lyapunov 函数分析方法. 本文以上述研究为基础, 针对奇异脉冲系统的特点, 运用时变的 Lyapunov 函数方法分析系统的稳定性. 在此基础上, 结合凸组合技术, 线性矩阵不等式, 得到系统新的稳定性判据, 并用数值例子验证了本文方法的有效性和优越性.

1 问题描述

用到的记号: R^n 表示 n 维欧式空间, $\mathbb{R}_+ = [0,$

$\infty)$, $J = [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$, $x \in R^n$, $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$

表示 x 的范数. 相应地 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R_{n \times n}$, $\|A\| = \lambda_{\max}^{1/2}(A^T A)$. 对给定的实对称矩阵 $M > (\geq, <, \leq) 0$, 表示 M 为正定(半正定, 负定, 半负定)矩阵. I 表示合适维数的单位矩阵, \mathbb{N} 表示正整数集. $\lambda_{\max}(M)$, $\lambda_{\min}(M)$ 分别表示对称矩阵 M 的最大、最小的特征值.

考虑如下线性奇异脉冲系统:

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, t \neq t_k, \\ \Delta x = U_k(t, x), t = t_k, k = 1, 2, \dots \\ x(t_0) = x_0, t_0 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $t \in J$, $t_0 \geq 0$, $x \in R^n$, $u \in R^m$ 分别是系统的状态向量和控制输入; 矩阵 $E \in R^{n \times n}$ 可能是奇异的, 假设 $\text{rank}(E) = r \leq n$; (E, A) 正则, 即存在复数 s 使得 $\det(sE - A) \neq 0$ 成立; A 和 B 是描述系统的适当维数矩阵; 时间序列 $\{t_k\}$ 为系统的脉冲跳跃时间点且满足

$$t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty. \quad (2)$$

这里 $\Delta x|_{t_k} = x(t_k^+) - x(t_k^-) = U_k(t_k, x(t_k))$, $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$, $x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h)$. 简便起见, 假设 $x(t_k^-) = x(t_k)$, $U_k(t_k, x(t_k)) = c_k x(t_k)$, $c_k, k = 1, 2, \dots$ 为常数.

设计状态反馈控制律 u 为

$$u(t) = Lx(t), \quad (3)$$

这里 $L \in R^{m \times n}$ 是常数矩阵. 由闭环系统(1)和反馈控制律(3)得

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + BLx, t \neq t_k, \\ \Delta x = c_k x(t), t = t_k, k = 1, 2, \dots \\ x(t_0) = x_0, t_0 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

定义 1.1 如果存在常数 $a > 0, b > 0$, 使得当 $t > t_0$ 时状态向量满足不等式:

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| ae^{-b(t-t_0)}, t > t_0, \quad (5)$$

则系统(4)是指数稳定的.

定义 1.2 如果存在常数 $a > 0, b > 0$, 使得当 $t > t_0$ 时状态向量满足不等式:

$$\|Ex(t)\| \leq \|Ex(t_0)\| ae^{-b(t-t_0)}, t > t_0, \quad (6)$$

则系统(4)是 E 指数稳定的.

以下讨论奇异脉冲系统(4)的指数稳定和 E 指数稳定之间的关系.

因为 (E, A) 正则, 所以存在适合维数的非奇异矩阵 Q, G 使奇异脉冲系统(4)等价于

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_{11} u, t \neq t_k, \\ N \dot{x}_2 = x_2 + B_{22} u, t \neq t_k, k = 1, 2, \dots \\ \Delta x_i = c_k x_i(t_k), x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

其中 $x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, n_1 + n_2 = n, N$ 是合适维数的幂零矩阵,且

$$\begin{aligned} QEG &= \text{diag}(I_{n_1}, N), QAG = \text{diag}(A_1, I_{n_2}), \\ x &= G \text{col}(x_1, x_2), x_0 = \text{col}(x_{10}, x_{20}), QB = \\ &\text{col}(B_{11}, B_{12}). \end{aligned} \quad (8)$$

引理 1.1^[21,22] 奇异脉冲系统(7)的通解可表示为

$$\begin{cases} x_1(t) = \prod_{j=1}^k (1 + c_j) \exp [A_1(t - t_0)] x_{10}, \\ t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots \\ x_2(t) = - \sum_{j=1}^{h-1} N^j x_2(t_0) \delta^{(j-1)}(t - t_0) - \\ \sum_{j=1}^{h-1} N^j \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_2(t_k) \delta^{(j-1)}(t - t_k), t \geq t_0, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\delta(t)$ 是狄拉克脉冲函数.

引理 1.2 对于奇异脉冲系统(4)和(7)下面两个结论是等价的.

- 1) 对于奇异脉冲系统(4),存在正数 a, b 使得 $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| ae^{-b(t-t_0)}, t > t_0$. (10)
- 2) 对于奇异脉冲系统(7),存在正数 \bar{a}, \bar{b} 使得 $\|x_1(t)\| \leq \|x(t_0)\| \bar{a}e^{-\bar{b}(t-t_0)}, t > t_0$. (11)

证明 由引理 1.1 的(9)式知, $x_2(t) = 0, t \neq t_k, k = 0, 1, 2, \dots$, 又因 $x_2(t)$ 在 t_k 左连续的, 即 $x_2(t_k^-) = x_2(t_k) = 0, k = 1, 2, \dots$, 所以 $x_2(t) = 0, t > t_0$, 综上有 $x = G \text{col}(x_1, x_2) = G \text{col}(x_1, 0), t > t_0$. (12)

$$\|x\| \leq \|G\| \|x_1\|, \|x_1\| \leq \|G^{-1}\| \|x\|, t > t_0. \quad (13)$$

由(10)式, (11)式, (13)式可知引理 1.2 成立.

注 1.1 引理 1.2 说明奇异脉冲系统(4)的指数稳定和下面系统的指数稳定性是等价的,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1, t \neq t_k, \\ \Delta x_1 = c_k x_1(t_k), t = t_k, k = 1, 2, \dots \\ x_1(t_0) = x_{10}. \end{cases} \quad (14)$$

引理 1.3 奇异系统(4)的指数稳定和 E 指数稳定是等价的.

证明 由(8)式知

$$QEx = QEG \text{col}(x_1, x_2) = \text{diag}(I_{n_1}, N) \text{col}(x_1, x_2) = \text{col}(x_1, Nx_2).$$

因 Q, G 是非奇异矩阵, $x_2(t) = 0, t > t_0$, 有

$$\begin{aligned} QEx &= \text{col}(x_1, 0), \\ \|x_1(t)\| &\leq \|QEx\| \leq \|Q\| \|Ex\|, \\ \|Ex(t)\| &= \|Q^{-1} \text{col}(x_1, 0)\| \leq \\ &\|Q^{-1}\| \|x_1\|. \end{aligned} \quad (15)$$

假如奇异脉冲系统(4)是 E 指数稳定的, 那么(6)式成立. 由(6)式, (15)式可得

$$\|x_1(t)\| \leq \|Q\| \|Ex(t_0)\| ae^{-b(t-t_0)} \leq \|x(t_0)\| \bar{a}e^{-\bar{b}(t-t_0)}, t \geq t_0,$$

其中 $\bar{a} = \|Q\| \|E\|$, 那么由引理 1.2 可知系统(4)也是指数稳定的. 同样, 如果奇异脉冲系统(4)是指数稳定的, 那么(5)式成立, 由引理 1.2 知(11)式成立, 结合(15)得

$$\|Ex(t)\| \leq \|Q^{-1}\| \|x(t_0)\| \bar{a}e^{-\bar{b}(t-t_0)} = \|x(t_0)\| \bar{c}e^{-\bar{b}(t-t_0)}, t > t_0.$$

其中 $\bar{c} = \|Q^{-1}\| \bar{a}$ 是常数, 那么由定义 1.2 可知系统(4)也是 E 指数稳定的.

2 稳定性分析

假设 $\{t_k\} \in S(\sigma_1, \sigma_2) = \{\{t_k\} : \sigma_1 \leq t_{k+1} - t_k \leq \sigma_2, k \in N\}$, 其中 σ_1, σ_2 为正数. 为了实现目标, 对给定的脉冲时间序列 $\{t_k\}$, 引入辅助分段线性函数 $\bar{\rho}(t)$, $\rho_{11}(t), \rho_{12}(t)$, 当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, 定义函数

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k}, \rho_{11}(t) = (t - t_k) \bar{\rho}(t), \rho_{12}(t) = (t_{k+1} - t) \bar{\rho}(t), k \in N. \quad (16)$$

易知

$$\rho_{11}(t) \in (0, 1], \rho_{12}(t) \in [0, 1], \forall t \geq t_0.$$

且

$$\rho_{11}(t_k^+) = \rho_{12}(t_{k+1}) = 0, \rho_{12}(t_k^+) = \rho_{11}(t_{k+1}) = 1, k \in N.$$

如果脉冲时间序列 $\{t_k\} \in S(\sigma_1, \sigma_2)$, 则存在函数 $\rho_{21}(t) \in (0, 1]$, 使 $\bar{\rho}(t) = \frac{1}{\sigma_1} \rho_{21}(t) + \frac{1}{\sigma_2} \rho_{22}(t)$, 且 $\rho_{21}(t) + \rho_{22}(t) = 1$. 利用函数序列 $\{\rho_{ij}(t)\}, i, j = 1, 2$, 定义如下时变 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \varphi(t) x^T(t) E^T P(t) x(t), \quad (17)$$

其中

$$P(t) = \rho_{11}(t) P_1 + \rho_{12}(t) P_2, \varphi(t) = \begin{cases} \mu^{\rho_{11}(t)}, & t \in [t_k, t_{k+1}], k \in N, \\ 1, & t \in [t_0 - h, t_0], \end{cases}$$

且 $\mu \leq \varphi(t) \leq 1, 0 < \mu \leq 1$. 对奇异脉冲系统(4), 运用时变 Lyapunov 函数, 可以得到下面结论.

定理 2.1 考虑奇异脉冲系统(4), 对已知的 $m \times n$ 矩阵 L 和脉冲时间序列 $\{t_k\} \in S(\sigma_1, \sigma_2)$, 以及给定的标量 $0 < \mu \leq 1, \gamma > 0$, 如果存在可逆矩阵 $P_l, l = 1, 2$, 使得下列矩阵不等式成立:

$$E^T P_l = P_l^T E \geq 0, l = 1, 2, \quad (18)$$

$$(c_k + 1)^2 E^T P_2 \leq \mu E^T P_1, \quad (19)$$

$$\Xi_{lp} = \left(\frac{1}{\sigma_p} \ln \mu + 2\gamma\right) E^T P_l + \frac{1}{\sigma_p} E^T (P_1 - P_2) + (A + BL)^T P_l + P_l^T (A + BL) < 0, l, p = 1, 2, \quad (20)$$

则奇异脉冲系统(4)具有全局指数稳定性.

证明 当 $t = t_k^+$, 由矩阵不等式(18), (19)得

$$V(t_k^+) = \varphi(t_k^+) x^T(t_k^+) E^T P(t_k^+) x(t_k^+) = (c_k + 1)^2 x^T(t_k) E^T P_2 x(t_k) \leq \mu x^T(t_k) E^T P_1 x(t_k) = V(t_k), k \in N. \quad (21)$$

由(18)式, 运用凸组合技术得

$$\sum_{l,p=1}^2 \rho_{1l}(t) \rho_{2q}(t) \Xi_{lp} < 0,$$

即

$$\Xi(t) = (\bar{\rho}(t) \ln \mu + 2\gamma) E^T P(t) + \bar{\rho}(t) E^T (P_1 - P_2) + (A + BL)^T P(t) + P(t)^T (A + BL) < 0,$$

对于 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $V(t)$ 沿着系统(4)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \bar{\rho}(t) \ln \mu V(t) + \varphi(t) x^T(t) \bar{\rho}(t) E^T (P_1 - P_2) x(t) + 2\varphi(t) \dot{x}^T(t) E^T P(t) x(t) = \\ &= \bar{\rho}(t) \ln \mu V(t) + \varphi(t) x^T(t) \bar{\rho}(t) E^T (P_1 - P_2) x(t) + \varphi(t) x^T(t) (A + BL)^T P(t) x(t) + \\ &= \varphi(t) x^T(t) P^T(t) (A + BL) x(t) = \varphi(t) x^T(t) \cdot \Xi(t) x(t) - 2\gamma V(t) < -2\gamma V(t), \end{aligned}$$

由上式可得

$$V(t) < V(t_k^+) e^{-2\gamma(t-t_k^+)}, k \in N,$$

结合不等式(21), 有

$$V(t) < V(t_k) e^{-2\gamma(t-t_k)}, k \in N,$$

重复运用上面不等式得

$$V(t) < V(t_0) e^{-2\gamma(t-t_0)}, \forall t \geq t_0.$$

因为 $E^T P(t) = P^T(t) E \geq 0$, 且 $P(t)$ 为可逆矩阵, 所以存在一个对称正定矩阵 $Q(t)$ 使 $E^T P(t) = E^T Q(t) E$, 运用凸组合技术知存在正定矩阵 $Q_l, l = 1, 2$, 使得 $Q(t) = \rho_{11} Q_1 + \rho_{12} Q_2$. 为了方便, 令 $\lambda_0 = \min\{\lambda_{\min} Q_l, l = 1, 2\}, \lambda_1 = \max\{\lambda_{\max} Q_l, l = 1, 2\}$. 可得

$$\mu \lambda_0 \|Ex(t)\|^2 \leq V(t) \leq V(t_0) e^{-2\gamma(t-t_0)} \leq \lambda_1 \|Ex(t_2)\|^2 e^{-2\gamma(t-t_0)}, t > t_0.$$

易知

$$\|Ex(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\mu \lambda_0}} \|Ex(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, t > t_0.$$

由引理 1.3 知奇异脉冲系统(4)的零解是 E 指数稳定, 也是指数稳定.

3 数值仿真

考虑线性奇异脉冲系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, t \neq t_k, \\ \Delta x = c_k x(t_k), t = t_k, \end{cases}$$

其中

$$u(t) = Lx(t).$$

参数如下:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -10 & 0.36 & -5 \\ -1.5 & 2 & -0.5 \end{bmatrix},$$

且 $c_k = -1.2$, 在这个例子中假设 $\sigma_1 = \sigma_2 = \rho$, 应用定理 2.1, 取 $\rho = 0.5, \mu = 0.3, \gamma = 0.6$, 即可找到矩阵 P_1, P_2 , 使矩阵不等式(9), (10), (11)成立, 其中

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.3896 & 2.3483 & 0 \\ -2.0676 & -5.1133 & 0 \\ 1.5875 & 4.7121 & 0.1406 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.6463 & 1.1810 & 0 \\ -2.3213 & 4.4332 & 0 \\ 1.7524 & -3.9665 & 0.1616 \end{bmatrix}.$$

由定理 2.1 知奇异脉冲系统(4)是全局指数稳定的. 仿真结果如图 1.

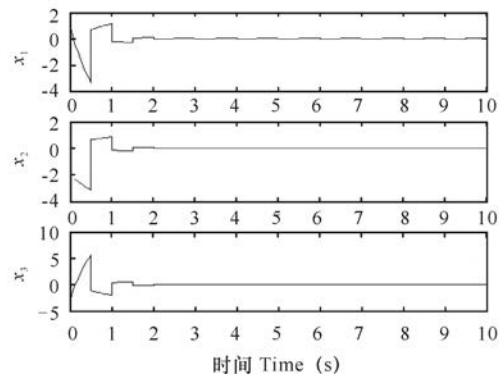


图 1 奇异脉冲系统的状态曲线

Fig. 1 The state of singular impulsive system

由图 1 可看出, 本文方法是有效的.

参考文献:

- [1] Zhang N, Wu T J. Guaranteed performance control and its application for a class of uncertain hybrid systems [J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2002, 28(11): 435-401.
- [2] Hespanha J P, Liberzon D, Teel A R. On Inputto State Stability of Impulsive Systems[C]. Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC05. 44th IEEE Conference on IEEE, 2005: 3992-3997.
- [3] Zhao S, Liu J S L. Finite-time stability of linear time-varying singular systems with impulsive effects[J]. International Journal of control, 2008, 81(11): 1824-1829.
- [4] Zhang H G, Fu J, Ma T D, et al. An improved impulsive control approach to nonlinear systems with time-varying delays[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(3): 969-974.
- [5] Li C, Gao D Y, Liu C. Impulsive control for synchronizing delayed discrete complex networks with switching topology[J]. Neural Computing and Applications, 2014, 24(1): 59-68.
- [6] Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical systems[J]. International Journal of Control, 1974, 20(2): 191-202.
- [7] Newcomb R W, Dziurla B. Some circuits and systems

applications of semistate theory[J]. Circuits, Systems and Signal Process, 1989, 8(3): 235-260.

[8] Mills J K, Goldenberg A A. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks[J]. IEEE Transactions on, 1989, 5(1): 30-46.

[9] Stevens B L, Lewis F L. Aircraft Modeling, Dynamics and Control[M]. New York: Wiley, 1991.

[10] Luenberger D G. Dynamic equation in descriptor form [J]. Automatic Control IEEE Transactions on, 1997, 22(3): 312-321.

[11] Aplevich J D. Minimal representations of implicit linear systems[J]. Automatica, 1985, 21(3): 259-269.

[12] Brenan K E, Campbell S L, Petzold L R. Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-algebraic Equations[M]. New York: Elsevier, 1989.

[13] Debeljkovic D L. Singular control systems[J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series A, 2004, 11: 691-706.

[14] Dai L. Singular Control Systems[M]. New York: Springer-Verlag New York, Inc, 1989: 2-40.

[15] 关治洪. 奇异系统的某些性质及其与奇异脉冲系统的稳定性等价[J]. 应用数学, 1997, 10(1): 96-100.
Guan Z H. Some characteristics and the stability equivalence for singular system and impulsive singular systems [J]. Mathematica Applicata, 1997, 10(1): 96-100.

[16] Ding Y C, Zhu H, Zhang Y P, et al. Robust stabilization of stochastic singular systems with markovian switching [J]. Advanced Materials Research, 2012, 591: 1496-1501.

[17] Zhou L, Ho D W C, Zhai G. Stability analysis of switched linear singular systems[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1481-1487.

[18] 关治洪, 刘永清. 奇异脉冲系统解的构造和稳定性[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 1995, 29(3): 276-280.
Guan Z H, Liu Y Q. Stability and construction of solutions for singular and measure systems with impulsive effect[J]. Journal of Central China Normal University (Nat. Sci), 1995, 29(3): 276-280.

[19] Yao J, Guan Z H, Chen G R, et al. Stability, robust stabilization and H_∞ control of singular impulsive systems via switching control[J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(11): 879-886.

[20] Zhou L, Yang C, Zhang Q, et al. Finite-time stability analysis for linear time-varying singular impulsive systems[J]. Scientific Research and Essays, 2011, 6(16): 3344-3350.

[21] Guan Z H, Yao J, Hill D J. Robust H_∞ control of singular impulsive systems with uncertain perturbations[J]. Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on, 2005, 52(6): 293-298.

[22] Guan Z H, Qian T H, Yu X. On controllability and observability for a class of impulsive systems[J]. Systems and Control Letters, 2002, 47(3): 247-257.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 410 页 Continue from page 410)

将一个散射体和两个散射体束流利用率进行比较, 可以发现单膜散射法的束流利用率为 5%, 单阻止柱双散射体方法的为 17%, 而双环双散射体方法的为 27%, 双环双散射体方法的束流利用率明显提高。这是因为双环双散射体的第二个散射体为环形结构, 利用内盘和外环散射材料散射能力的不同而形成均匀分布的束流; 而单阻止柱双散射系统中, 第二个散射体前面的阻止柱完全阻挡掉中心轴线的部分束流, 然后再经过第二个散射体, 在测量平面上得到均匀分布的束流。

综合考虑束流利用率, 平均能量损失及形成距离, 单膜散射法通常用来扩展半径为 2 cm 以下的束流, 双散射体方法可以用来扩展半径为 10 cm 以下的束流, 是单膜散射法的 5 倍。双环双散射体方法的形成距离比单阻止柱双散射体方法小, 便于安装在转动机架上。因此, 双环双散射体方法是被动散射体方法中比较好的方法。

参考文献:

[1] Kostjuchenko V, Nichiporov D, Luckjashin V. A com-

pact ridge filter for spread out Bragg peak production in pulsed clinical beams [J]. Med Phys, 2001, 28: 1427-1430.

[2] Smith A R. Proton therapy [J]. Phys Med Biol, 2006, 51: R491-R504.

[3] Highland V L. Some practical remarks on multiple scattering[J]. Nucl Instr Meth, 1975, 129: 497-499.

[4] Ferrari A, Sala P R, Fasso A, et al. Fluka: A multi-particle transport code[J]. CERN European Organization for Nuclear Research, 2005, 10: 49-61.

[5] 郁庆长, 罗正明. 质子治疗技术基础[M]. 北京: 原子能出版社, 1999: 94-103.
Yu Q C, Luo Z M. The Basic of Proton Therapy Technology[M]. Beijing: Atomic Energy Press, 1999: 94-103.

[6] Takada Y. Dual-ring double scattering method for proton beam spreading[J]. Japan J Appl Phys, 1994, 33: 353-359.

[7] Gottschalk B. Multiple Coulomb scattering of 160 MeV protons[J]. Nucl Instr Meth B, 1993, 74: 467-490.

(责任编辑: 米慧芝)