

四维超混沌 Lorenz 系统的有限时间同步研究^{*}

Finite-time Synchronization of Hyperchaotic Lorenz Systems

冯 瑜¹, 刘爱民²

FENG Yu¹, LIU Ai-min²

(1. 玉林师范学院数学与信息科学学院, 广西高校复杂系统优化与大数据处理重点实验室, 广西玉林 537000; 2. 玉林师范学院教育技术中心, 广西玉林 537000)

(1. Guangxi Universities Key Lab of Complex System Optimization and Big Data Processing, School of Mathematics and Information Science, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. Education Technology Center, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要: 基于 Lyapunov 稳定性理论, 通过设计适当反馈控制器, 实现了四维超混沌 Lorenz 系统在确定参数和不确定参数两种情况下的有限时间同步, 并用数值模拟验证了理论分析的有效性。

关键词: 超混沌系统 Lyapunov 稳定性理论 有限时间同步

中图分类号: O415, TN918 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2015)02-0220-05

Abstract: In this paper, the finite-time synchronization of hyperchaotic Lorenz system is studied. Based on the Lyapunov stability theory, it is proved that finite-time synchronization for hyperchaotic Lorenz systems with certain or uncertain parameters can be achieved with some suitable controllers. Numerical simulations and circuit implementation are taken to illustrate that the theoretical analysis here is effective.

Key words: hyperchaotic Lorenz system, Lyapunov stability theory, finite-time synchronization

0 引言

混沌是非线性科学的一个重要分支, 是在确定性系统中出现类似随机而无规则的动力学行为, 且混沌系统具有内随机性、连续宽谱性和初值敏感性等显著特点。自从 Pecora 和 Carroll^[1] 在实验中观察到混沌同步现象以来, 混沌同步的研究逐渐成为理工科领域的研究热点, 引起了国内外专家学者的关注, 已有一

系列有效混沌同步控制方法被报道^[2~4]。在实际应用中, 人们往往希望混沌系统能够在有限时间内实现同步, 特别是能在受到干扰或者具有不确定因素的情况下实现有限时间同步的系统往往具有更好的性能与适用范围。19 世纪 80 年代, Artstein^[5] 和 Sontag^[6] 提出控制 Lyapunov 函数(CLF)的概念, 并将其应用到非线性控制系统的设计中, 而且 Sontag 已取得突破性的进展, 得出一个通用的设计公式。随后, 还有学者也应用这种控制方法对混沌系统的同步性进行研究^[7,8]。

超混沌系统是指具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数的系统。无论在代数结构还是动力学行为上, 超混沌系统比通常的混沌系统复杂许多。在混沌保密通信中, 混沌模型的维数和混沌信号的复杂程度决定着隐藏信息的保密程度。已经证明, 用简单的混

收稿日期: 2014-05-20

修回日期: 2014-06-09

作者简介: 冯 瑜(1978-), 男, 硕士, 讲师, 主要从事非线性泛函研究。

^{*} 国家自然科学基金项目(11161051)和玉林师范学院重点项目(2014YJZD01)资助。

沌系统加密的信息并不安全^[9],而高阶超混沌系统具有更好的保密性和其它通信性能^[10].正是由于超混沌系统动力学行为的难以预测性,使其在需要复杂混沌的工程领域,例如激光、振荡和数字语音等方面有巨大的应用潜力和广泛的应用前景.因而,对超混沌系统的机理和应用研究成为混沌学中的又一热点.

文献[11]提出如下四维超混沌 Lorenz 系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_2 - x_1x_3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = -kx_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_1, x_2, x_3, x_4 为系统的状态变量, a, b, c, k 为系统实参数,取参数 $(a, b, c, k) = (10, 8/3, 30, 10)$ 时,系统(1)有两个正的李雅普诺夫指数,从而系统呈混沌状态.本文研究系统(1)在确定参数和不确定参数两种情况下的有限时间同步问题,基于控制 Lyapunov 函数,设计合适的反馈控制器,使系统实现了有限时间同步,并用数值模拟验证了理论分析的有效性.

1 预备知识

设 $f: R^n \rightarrow R^n$ 为 n 维向量函数, $V: R^n \rightarrow R$ 为标量函数,记 $V(x)$ 沿 $f(x)$ 的 Lie 导数为

$$L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x).$$

其中, $L_f V(x)$ 是标量函数.若 $G(x)$ 是 $n \times m$ 矩阵函数,即 $G(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]$, 其中 $g_i(x): R^n \rightarrow R^n$, 那么类似可记

$$L_G V(x) = [L_{g_1} V(x), L_{g_2} V(x), \dots, L_{g_m} V(x)].$$

这里, $L_G V(x)$ 是一个 m 维行向量.

定义 1 考虑两个系统

$$\dot{x} = f(x), \dot{y} = h(y),$$

其中 x, y 是 n 维向量,向量函数 $f, h: R^n \rightarrow R^n$.若存在一个常数 T 使得 $\lim_{t \rightarrow T} \|x - y\| = 0$,且当 $t \geq T$ 时,有 $\|x(t) - y(t)\| = 0$,则称这两个系统能达到有限时间同步.

定义 2 考虑控制超混沌系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

其中 u 是控制参数.一个正定函数 $V(x): R^4 \rightarrow R^+$ 称为该系统的一个控制 Lyapunov 函数,如果 $V(x)$ 是光滑的,且由 $L_g V(x) = 0 (x \neq 0)$ 可推出 $L_f V(x) < 0$.

引理 1^[12] 假设 $V(t)$ 是连续、正定函数,且满足

$$\dot{V}(t) \leq -cV^m(t),$$

其中 $c > 0, 0 < m < 1$ 均为常数.则对任意给定的 $t_0, V(t)$ 满足下列不等式

$$V^{1-m}(t) \leq V^{1-m}(t_0) - c(1-m)(t-t_0), t_0 \leq t \leq T.$$

$$V(t) = 0, t \geq T.$$

其中, $T = t_0 + \frac{V^{1-m}(t_0)}{c(1-m)}$.

2 主要结果

2.1 确定参数系统的有限时间同步

设系统(1)为驱动系统,响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 = cy_1 - y_2 - y_1y_3 + y_4 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - by_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 = -ky_1 + u_4. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $u_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为系统同步控制变量.设响应系统(2)和驱动系统(1)之间的状态误差为 $e_i = y_i - x_i (i=1, 2, 3, 4)$,则误差系统方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + u_1 = -ae_1 + ae_2 + u_1, \\ \dot{e}_2 = ce_1 - e_2 - y_1y_3 + x_1x_3 + e_4 + u_2 = ce_1 - e_2 + e_4 + e_1e_3 - e_1y_3 - e_3y_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 = -be_3 + y_1y_2 - x_1x_2 + u_3 = -be_3 - e_1e_2 + e_1y_2 + e_2y_1 + u_3, \\ \dot{e}_4 = -ke_1 + u_4. \end{cases} \quad (3)$$

记误差向量 $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$, 并取 $u_2 =$

$-\beta(\frac{1}{2}e_2^\eta)/e_2$, 其中 $\beta > 0, 0 < \eta < 1$, 则上式可写成

$$\dot{e} = f(y, e) + B\tilde{u}, \quad (4)$$

其中

$$f(y, e) =$$

$$\begin{pmatrix} -ae_1 + ae_2 \\ ce_1 - e_2 + e_4 + e_1e_3 - e_1y_3 - e_3y_1 - \beta(\frac{1}{2}e_2^\eta)/e_2 \\ -be_3 - e_1e_2 + e_1y_2 + e_2y_1 \\ -ke_1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

引理 2 函数 $V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ 是系统(4)的一个控制 Lyapunov 函数.

证明 由题设知

$$\frac{\partial V}{\partial e} = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

若 $\frac{\partial V}{\partial e}B = 0$, 则有

$$(e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_3 \ e_4) =$$

0,

即 $e_1 = e_3 = e_4 = 0$, 从而

$$\frac{\partial V}{\partial e}f(y, e) = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -ae_1 + ae_2 \\ ce_1 - e_2 + e_4 + e_1e_3 - e_1y_3 - e_3y_1 - \beta(\frac{1}{2}e_2^2)^\eta/e_2 \\ -be_3 - e_1e_2 + e_1y_2 + e_2y_1 \\ -ke_1 \end{pmatrix}$$

$$= -e_2^2 - \beta(\frac{1}{2}e_2^2)^\eta < 0,$$

所以 $V(e)$ 是系统(4)的控制 Lyapunov 函数.

定理 1 当选取控制器为

$$\tilde{u}(y, e) = \begin{cases} -(L_B V)^T \frac{L_f V + \beta V^m}{\|L_B V\|^2}, L_B V \neq 0, \\ 0, L_B V = 0 \end{cases} \quad (5)$$

时, 系统(2)在有限时间 T 内与系统(1)同步. 其中

$$V, B \text{ 同上, 时间 } T \leq t_0 + \frac{V^{1-m}(t_0)}{\beta(1-m)}.$$

证明 当 $L_B V \neq 0$ 时,

$$\frac{dV(e)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial e} [f(y, e) + B\tilde{u}] = L_f V + L_B V \cdot \tilde{u} =$$

$$L_f V + L_B V \cdot \left(-(L_B V)^T \frac{L_f V + \beta V^m}{\|L_B V\|^2} \right) = -\beta V^m.$$

从而由引理 1 知系统(2)在有限时间 $T \leq t_0 +$

$$\frac{V^{1-m}(t_0)}{\beta(1-m)}$$
 内与系统(1)同步.

2.2 不确定参数系统的有限时间同步

假设驱动系统和响应系统分别为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a + \Delta_1)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_2 - x_1x_3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - (b + \Delta_2)x_3, \\ \dot{x}_4 = -(k + \Delta_3)x_1, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (a + \Delta_4)(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 = cy_1 - y_2 - y_1y_3 + y_4 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - (b + \Delta_5)y_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 = -(k + \Delta_6)y_1 + u_4. \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Delta_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 表示参数随着时间变化的不确定性, 且设 $\sup_{1 \leq i \leq 6} |\Delta_i| \leq \gamma, u_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为系统

同步控制变量. 记响应系统(7)和驱动系统(6)之间的状态误差为 $e_i = y_i - x_i (i=1, 2, 3, 4)$, 则不确定参数系统的误差系统方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + \Delta_1(e_2 - e_1 - y_2 + y_1) + \Delta_4(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 = ce_1 - e_2 + e_4 + e_1e_3 - e_1y_3 - e_3y_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 = -be_3 - e_1e_2 + e_1y_2 + e_2y_1 + \Delta_2(y_3 - e_3) - \Delta_5y_3 + u_3, \\ \dot{e}_4 = -ke_1 + \Delta_3(y_1 - e_1) - \Delta_6y_1 + u_4. \end{cases} \quad (8)$$

记误差向量 $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$, 并取 $u_2 = -\beta(\frac{1}{2}e_2^2)^\eta/e_2$, 其中 $\beta > 0, 0 < \eta < 1$, 令

$$g(y, e) =$$

$$\begin{pmatrix} -ae_1 + ae_2 \\ ce_1 - e_2 + e_4 + e_1e_3 - e_1y_3 - e_3y_1 - \beta(\frac{1}{2}e_2^2)^\eta/e_2 \\ -be_3 - e_1e_2 + e_1y_2 + e_2y_1 \\ -ke_1 \end{pmatrix},$$

$$H(y, e) =$$

$$\begin{pmatrix} e_2 - e_1 & 0 & 0 & y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ y_2 + y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_3 - e_3 & 0 & 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 - e_1 & 0 & 0 & -y_1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6)^T, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{u} =$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix},$$

则误差系统方程可写成

$$\dot{e} = g(y, e) + H(y, e)\Delta + B\tilde{u}. \quad (9)$$

由 $\sup_{1 \leq i \leq 6} |\Delta_i| \leq \gamma$, 可设 $\|\Delta\| \leq \delta, \delta$ 为常数.

引理 3 函数 $V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ 是系统(9)的一个控制 Lyapunov 函数.

证明 由题设知

$$\frac{\partial V}{\partial e} = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

若 $\frac{\partial V}{\partial e}B = 0$, 那么

$$(e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(e_1 \ e_3 \ e_4) = 0,$$

即 $e_1 = e_3 = e_4 = 0$, 从而

$$\frac{\partial V}{\partial e} (g(y, e) + H(y, e)\Delta) = -e_2^2 - \beta \left(\frac{1}{2}e_2^2\right)^m < 0,$$

所以 $V(e)$ 是系统(9)的控制 Lyapunov 函数。

定理 2 当选取控制器为

$$\tilde{u}(e, y) =$$

$$\begin{cases} -(L_B V)^T \frac{L_g V + \delta \|L_H V\| + \beta V^m}{\|L_B V\|^2}, L_B V \neq 0, \\ 0, L_B V = 0 \end{cases} \quad (10)$$

时, 系统(7)在有限时间 T 内与系统(6)同步. 其中

$$V, B \text{ 同上, 时间 } T \leq t_0 + \frac{V^{1-m}(t_0)}{\beta(1-m)}.$$

证明 当 $L_B V \neq 0$ 时,

$$\dot{V}(e) = \frac{\partial V}{\partial e} [g(y, e) + H(y, e) \cdot \Delta + B \cdot \tilde{u}] =$$

$$L_g V + L_H V \cdot \Delta + L_B V \cdot \tilde{u} = L_g V + L_H V \cdot \Delta + L_B V \cdot \left(- (L_B V)^T \frac{L_g V + \delta \|L_H V\| + \beta V^m}{\|L_B V\|^2} \right) = L_H V \cdot \Delta - \delta \|L_H V\| - \beta V^m \leq -\beta V^m.$$

从而由引理 1 可知系统(7)在有限时间 $T \leq t_0 +$

$$\frac{V^{1-m}(t_0)}{\beta(1-m)}$$

内与系统(6)同步。

3 数值仿真

先考虑确定参数系统情形, 即响应系统(2)在控制器(5)作用下与驱动系统(1)的同步仿真. 取初始状态 $x(0) = [2, -4, 3, -1]^T, y(0) = [4, -1, 2, -3]^T$, 控制器参数 $\beta = 1, m = 0.5$, 则由定理 1 可知, 响应系统(2)将在时间 $T = 6$ s 内同步于驱动系统(1), 仿真结果如图 1. 不难看出, 仿真结果与理论分析结果是一致的。

再考虑响应系统(7)在控制器(10)作用下与驱动系统(6)的同步仿真. 同样取初始状态 $x(0) = [2, -4, 3, -1]^T, y(0) = [4, -1, 2, -3]^T$, 控制器参数

$$\beta = 1, m = 0.5, \Delta = (2 \sin x_1, -\frac{1}{2} \cos x_3, \sin x_1,$$

$$2 \cos y_1, -\sin y_3, 2 \cos y_1), \delta = 4,$$

则由定理 2 可知, 响应系统(7)将在时间 $T = 6$ s 内同步于驱动系统(6). 仿真结果如图 2. 由图 2 可看出,

响应系统(7)在时间 T 内快速地同步于驱动系统(6).

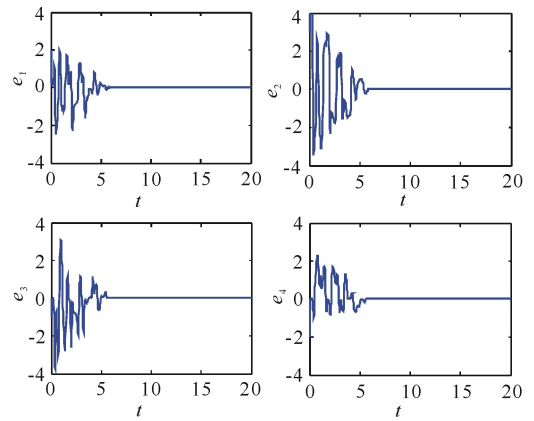


图 1 确定参数系统的误差仿真

Fig. 1 Error simulation of certain system

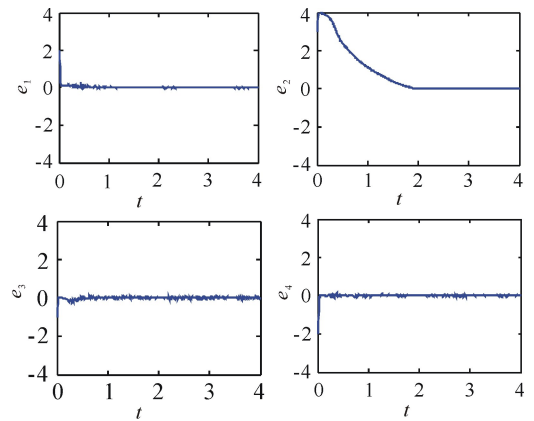


图 2 不确定参数系统的误差仿真

Fig. 2 Error simulation of uncertain system

数值仿真验证了理论分析的有效性, 同时也可看出, 与一般控制设计方法相比, 采用控制 Lyapunov 函数的方法具有良好的收敛性能。

参考文献:

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64 (8): 821-824.
- [2] 刘爱民, 张康明. 洛伦兹超混沌系统的同步控制[J]. 广西科学, 2009, 16 (2): 164-166.
Liu A M, Zhang K M. Synchronization control of Lorenz hyper-chaotic system[J]. Guangxi Sciences, 2009, 16 (2): 164-166.
- [3] Pang S, Liu Y. A new hyperchaotic system from the Lü system and its control[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8): 2775-2789.
- [4] 蒋炎华, 刘爱民, 张康明, 等. 共轭洛伦兹型混沌系统的同步控制方法[J]. 广西科学, 2010, 17 (1): 48-51.
Jiang Y H, Liu A M, Zhang K M, et al. Synchronization control of conjugate Lorenz type chaotic systems[J].

- Guangxi Sciences, 2010, 17(1): 48-51.
- [5] Artstein Z. Stabilization with relaxed controls[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1983, 7(11): 1163-1173.
- [6] Songtag E D. A 'universal' construction of Arstein's theorem on nonlinear stabilization[J]. Systems and Control Letters, 1989, 13(2): 117-123.
- [7] Liu Y. Circuit implementation and finite-time synchronization of the 4D Rabinovich hyperchaotic system[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(1): 89-96.
- [8] 王划. 不确定混沌系统控制与同步及应用研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2009.
Wang H. The Control and Synchronization of Uncertain Chaotic Systems and Its Applications [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2009.
- [9] Pérez G, Cerdeira H A. Extracting messages masked by chaos[J]. Physical Review Letters, 1995, 74(11): 1970.
- [10] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, et al. Digital communication using chaotic-pulse-position modulation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(12): 1436-1444.
- [11] Barboza R. Dynamics of a hyperchaotic Lorenz system [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2007, 17(12): 4285-4294.
- [12] Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(5): 678-682.

(责任编辑: 尹 闯)

关于撤销赖秀娟等发表在本刊 2013 年 20 卷 3 期 261~263 页论文的声明

根据读者的举报, 赖秀娟、蓝丽华、尹茵 2013 年在本刊第 3 期发表的论文《甘蔗叶黄酮类成分的抗致龋菌活性研究》(投稿日期: 2013-01-26, 修回日期: 2013-07-29, 起止页码: 261~263) 与广西中医药大学廖泽勇 2011 年发表的硕士论文《甘蔗叶黄酮类成分与生物活性研究》第五部分(正文页码 74~79) 中的主要数据和结论雷同(万方数据 <http://www.wanfangdata.com.cn/>)。经编辑部调查认定, 赖秀娟等人的论文存在严重学术不端问题。

为了加强我国科技界精神文明建设、提高科技工作者学术道德水平、保护我国科学研究成果的知识产权和维护《广西科学》的声誉, 本刊依照我国相关法律规定, 参照“全国性学会科技期刊道德公约”, 特做出如下决定:

1. 撤消赖秀娟、蓝丽华、尹茵发表在《广西科学》2013 年 20 卷 3 期 261~263 页的研究论文;
2. 在《广西科学》的纸质版和网页上发布撤消该论文的声明;
3. 《广西科学》今后将不再受理该论文作者的任何投稿。

在此, 《广西科学》再次声明, 本刊来稿严禁抄袭、剽窃他人的研究结果。一旦发现, 必将追究作者的责任, 并给予其严厉处罚。敬请广大作者严格自律, 注重科研诚信。