网络优先数字出版时间:2014-4-14
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140414.001.html
广西科学 Guangxi Sciences 2014,21(3):290～292

不定方程 $x^3+1=301y^2$ 的整数解*

The Integral Solutions of Diophantine Equation $x^3+1=301y^2$

高　丽,鲁伟阳,郝虹斐
GAO Li,LU Wei-yang,HAO Hong-fei

(延安大学数学与计算机科学学院,陕西延安　716000)
(College of Mathematics and Computer Science,Yan'an University,Yan'an,Shaanxi,716000,China)

摘要:利用递归数列、同余式、平方剩余以及 Pell 方程解的性质证明不定方程 $x^3+1=301y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$.

关键词:不定方程　整数解　递归数列　同余式
中图分类号:O156.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2014)03-0290-03

Abstract:In this paper,the author used recurrent sequence,congruence sequence,quadratic remainder and some properties of the solutions to Pell equation to prove that the Diophantine equation $x^3+1=301y^2$ has only integer solution $(x,y)=(-1,0)$.

Key words:diophantine equation,integer solution,recurrent sequence,congruence sequence

关于不定方程 $x^3\pm1=Dy^2(D>0)$ 的解已有不少研究成果.当 D 无 $6k+1$ 的素因数时,其全部解已由柯召等人计算得到[1,2].但是当 D 有 $6k+1$ 型的素因数时,方程的求解较为困难.倪谷炎[3]在关于不定方程 $x^3+1=Dy^2$ 一文中指出,当 $0<D<100$,不含平方因子,且被 $6k+1$ 型的素数整除时,只有当 $D=7,14,35,37,38,57,65,86$ 时有非平凡解,但是该文只是用计算机程序计算一些特殊的整数解,并没有给予证明.1995 年罗明[4]证明不定方程 $x^3+1=14y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(5,\pm3)$.后来他又在文献[5]中证明不定方程 $x^3+1=7y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(3,\pm2)$.2007 年段辉明[6]证明不定方程 $x^3+1=86y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(7,\pm2)$.在上述研究的基础上,本文利用递归数列、同余式、平方剩余[7,8]等方法研究不定方程 $x^3+1=301y^2$ 的整数解的问题.

引理 1[2]　不定方程 $x^2-3y^4=1$ 有整数解 $(x,y)=(2,1),(7,2),(1,0),(-1,0)$.

引理 2[2]　不定方程 $4x^2-3y^2=1$ 有整数解 $(x,y)=(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$.

定理 1　不定方程

$$x^3+1=301y^2 \tag{1}$$

仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$.

证明　因为 $(x+1,x^2-x+1)=1$ 或者 3,所以不定方程 $x^3+1=301y^2$ 有下列 8 种可能的分解(其中 a,b 互素).

情形 Ⅰ　$x+1=301a^2,x^2-x+1=b^2,y=ab$;

情形 Ⅱ　$x+1=7a^2,x^2-x+1=43b^2,y=ab$;

情形 Ⅲ　$x+1=903a^2,x^2-x+1=3b^2,y=3ab$;

情形 Ⅳ　$x+1=21a^2,x^2-x+1=129b^2,y=3ab$.

情形 Ⅴ　$x+1=a^2,x^2-x+1=301b^2,y=ab$;

收稿日期:2013-03-30
修回日期:2013-06-05
作者简介:高　丽(1966-),女,教授,主要从事数论、函数论方面的研究。
*国家自然科学基金项目(10271093),陕西省教育厅自然科学基金项目(2013JQ1019),延安大学高水平大学建设项目(2012SXTS07),延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZ2013-04),延安大学硕士研究生教育创新计划项目资助。

情形 Ⅵ $x+1=43a^2, x^2-x+1=7b^2, y=ab$；

情形 Ⅶ $x+1=3a^2, x^2-x+1=903b^2, y=3ab$；

情形 Ⅷ $x+1=129a^2, x^2-x+1=21b^2, y=3ab$.

分别讨论这 8 种情形下方程(1)的整数解.

(Ⅰ)由 $x^2-x+1=b^2$ 得 $x=0$ 或 1，代入 $x+1=301a^2$，不成立，故该情形下不定方程(1)无解.

(Ⅱ)由 $x^2-x+1=43b^2$ 得 $(2x-1)^2-43(2b)^2=-3$，将 $x+1=7a^2$ 代入得 $(14a^2-3)^2-43(2b)^2=-3$.

不定方程 $X^2-43Y^2=-3$ 的全部解分别由以下 2 个非结合类给出：

$$X+Y\sqrt{43}=\pm(x_n+y_n\sqrt{43})=\pm(13+2\sqrt{43})(u_n+v_n\sqrt{43})=\pm(13+2\sqrt{43})(3482+531\sqrt{43})^n,$$

$$X+Y\sqrt{43}=\pm(\overline{x_n}+\overline{y_n}\sqrt{43})=\pm(-13+2\sqrt{43})(u_n+v_n\sqrt{43})=\pm(-13+2\sqrt{43})(3482+531\sqrt{43})^n,$$

其中 $n\in Z$，$\pm13+2\sqrt{43}$ 是 $X^2-43Y^2=-3$ 的基本解，$3482+531\sqrt{43}$ 是 Pell 方程 $X^2-43Y^2=1$ 的基本解，所以有

$$2x-1=14a^2-3=\pm x_n \text{ 或者 } 2x-1=14a^2-3=\pm\overline{x_n}.$$

当 $n\in Z$ 时，$\pm x_n=\pm(13u_n+86v_n)=\pm(13u_{-n}-86v_{-n})=\pm(-13u_{-n}+86v_{-n})=\mp\overline{x_{-n}}$，所以只需考虑 $\pm x_n+3=14a^2$. 由 $u_n+v_n\sqrt{43}=(3482+531\sqrt{43})^n$ 知

$$\begin{cases}u_{n+2}=6964u_{n+1}-u_n, u_0=1, u_1=3482,\\ v_{n+2}=6964v_{n+1}-v_n, v_0=0, v_1=531.\end{cases}$$

由 $x_n+y_n\sqrt{43}=(13+2\sqrt{43})(u_n+v_n\sqrt{43})$ 知，

$$\begin{cases}x_{n+2}=6964x_{n+1}-x_n,\\ x_n=13u_n+86v_n,\\ x_{n+2k}\equiv -x_n \pmod{u_k},\end{cases}$$

其中 $x_0=13, x_1=95612$. 由 $x_{n+2}=6964x_{n+1}-x_n$ 知，当 $n\equiv0\pmod 2$ 时，$x_n\equiv1\pmod 3$，$-x_n+3\equiv2\equiv14a^2\pmod 3$，则 $\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{14}{3}\right)$，即 $-1=2$. 矛盾，此时不成立.

当 $n\equiv1\pmod 2$ 时，$x_n\equiv0\pmod 2$，由 $14a^2=x_n+3$ 得 $14a^2\equiv3\equiv1\pmod 2$，此时不可能成立. 所以只需考虑 $14a^2=x_n+3$，$2\mid n$ 的情况.

由 $14a^2=x_n+3$ 得 $(14a)^2=14x_n+42$，对序列 $\{14x_n+42\}$ 取模 17，23，其剩余类序列周期为 8，当 $n\equiv0,2\pmod 8$ 时，$14x_n+42\equiv3,12\pmod{17}$，但是 $\left(\frac{3}{17}\right)=\left(\frac{12}{17}\right)=-1$. 当 $n\equiv4,6\pmod 8$ 时，$14x_n+42\equiv14,11\pmod{23}$，但是 $\left(\frac{14}{23}\right)=\left(\frac{11}{23}\right)=-1$，所以当 $n\equiv0,2,4,6\pmod 8$ 时，$(14a)^2=14x_n+42$ 不成立，即当 $2\mid n$ 时，$14a^2=x_n+3$ 不成立. 故该情形下不定方程(1)无解.

(Ⅲ)由 $x^2-x+1=3b^2$ 得 $(2x-1)^2-3(2b)^2=-3$，将 $x+1=903a^2$ 代入得 $(2b)^2-3(602a^2-1)^2=1$. 若 $a=0$，则 $x=-1, y=0$.

下面讨论 $a\neq0$ 的情形，此时有 $2b+(602a^2-1)\sqrt{3}=(u_n+v_n\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^n, n\in Z$，其中 $2+\sqrt{3}$ 为 Pell 方程 $X^2-3Y^2=1$ 的基本解，所以 $602a^2-1=v_n, n\in Z$.

当 $2\mid n$ 时，$2\mid v_n$，所以 $602a^2=v_n+1$ 不可能成立. 当 $2\nmid n$ 时，又可以分为以下两种情况：

(i)当 $n\equiv1\pmod 4$ 时，则 $v_n\equiv1\pmod 8$，所以 $602a^2\equiv2\pmod 8$，即 $2a^2\equiv1\pmod 4$. 这与 $2a^2\equiv0\pmod 4$ 或 $2a^2\equiv2\pmod 4$ 矛盾.

(ii)当 $n\equiv3\pmod 4$ 时，可令 $n=4m-1$，则有 $602a^2=v_{4m-1}+1=-u_{4m}+2v_{4m}+1=-(1+6v_{2m}^2)+4u_{2m}v_{2m}+1=2v_{2m}(2u_{2m}-3v_{2m})=2v_{2m}u_{2m-1}$，所以 $301a^2=v_{2m}u_{2m-1}$. 又 $(v_{2m}, u_{2m-1})=(v_{2m}, 2u_{2m}-3v_{2m})=(2u_{2m}, v_{2m})=(v_{2m}, 2)=2$，所以 $2\mid a^2$. 可设 $a=2pq$，故有以下 4 个等式成立：

$$u_{2m-1}=4p^2, v_{2m}=301q^2, \tag{2}$$

$$u_{2m-1}=301p^2, v_{2m}=4q^2, \tag{3}$$

$$u_{2m-1}=2p^2, v_{2m}=602q^2, \tag{4}$$

$$u_{2m-1}=602p^2, v_{2m}=2q^2. \tag{5}$$

对(2)式，当 $n\equiv1\pmod 2$ 时，有 $u_n\equiv2\pmod 4$，这与 $u_{2m-1}=4a^2$ 不符合，故(2)式无解.

对(3)式，将 $u_{2m-1}=301p^2, v_{2m}=4q^2$ 代入 $u_{2m-1}^2-3v_{2m-1}^2=1$，得 $u_{2m}^2-3(2q)^4=1$，此式满足不定方程 $X^2-3Y^4=1$ 的特征，由引理 1 知，$q=\pm1,\pm2,0$，即 $v_m^2=0,1,4$，均不满足 $u_{2m-1}=301p^2$，故(3)式无解.

对(4)式，将 $u_{2m-1}=2p^2$ 代入 $u_{2m-1}^2-3v_{2m-1}^2=1$，得 $4(p^2)^2-3v_{2m-1}^2=1$，此式满足不等方程 $4X^2-3Y^2=1$ 的特征，由引理 2 知，$v_{2m-1}=\pm1$，又 $u_{2m-1}+v_{2m-1}\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{2m-1}$，则有 $m=1$ 或 $m=0$. 当 $m=1$ 时，得 $v_{2m}=v_2=2$ 与 $v_{2m}=602q^2$ 矛盾；当 $m=0$ 时，得 $v_{2m}=v_0=0$，又因为 $301a^2=v_{2m}u_{2m-1}$，所以 $a=0$，此时，不定方程(1)的非平凡解为 $(x, y)=(-1, 0)$.

对(5)式,将 $u_{2m-1}=602p^2$, $v_{2m}=2q^2$ 代入 $v_{2m}=2u_mv_m$,得 $u_mv_m=q^2$,而 $(u_m,v_m)=1$,于是有 $u_m=c^2$, $v_m=d^2$,并将其代入 $u_m^2-3v_m^2=1$,得 $(c^2)^2-3d^4=1$,此式满足 $X^2-3Y^4=1$ 的特征,由引理 1 知,$c^2=1$, $d=0$,从而 $q=cd=0$,即 $v_{2m}=0$,得 $m=0$, $v_{2m-1}=2$.这与 $u_{2m-1}=602p^2$ 不符,所以(5)式无解.

故该情形不定方程(1)有非平凡解 $(x,y)=(-1,0)$.

(Ⅳ)由 $x+1=21a^2$ 得,$x=21a^2-1$.

(i)当 a 为偶数时,$x\equiv-1(\mathrm{mod}\ 4)$, $x^2-x+1\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$, $129b^2\equiv b^2(\mathrm{mod}\ 4)$,则有 $b^2\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$,不可能成立.

(ii)当 a 为奇数时,$a\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$,由 $x=21a^2-1$ 知,$x\equiv4(\mathrm{mod}\ 8)$, $x^2-x+1\equiv5(\mathrm{mod}\ 8)$, $129b^2\equiv b^2(\mathrm{mod}\ 8)$,则有 $b^2\equiv5(\mathrm{mod}\ 8)$,也不可能成立.故该情形不定方程(1)无解.

(Ⅵ)由 $x^2-x+1=7b^2$ 得 $(2x-1)^2-7(2b)^2=-3$,将 $x+1=43a^2$ 代入可得 $(86a^2-3)^2-7(2b)^2=-3$.

不定方程 $X^2-7Y^2=-3$ 的全部解由以下两个结合类给出:

$X+Y\sqrt{7}=\pm(x_n+y_n\sqrt{7})=\pm(2+\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(2+\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n$, $n\in N$,

$X+Y\sqrt{7}=\pm(\overline{x_n}+\overline{y_n}\sqrt{7})=\pm(-2+\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(-2+\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n$, $n\in N$,

其中 $2+\sqrt{7}$ 是 $X^2-7Y^2=-3$ 的基本解,$8+3\sqrt{7}$ 是 $X^2-7Y^2=1$ 的基本解,因此有 $2x-1=86a^2-3=\pm x_n$ 或 $\pm\overline{x_n}$,易知 $\pm\overline{x_n}=-x_n$,故只需考虑

$$86a^2=\pm x_n+3. \tag{6}$$

由(6)式得 $x_n\equiv\pm3(\mathrm{mod}\ 86)$.容易验证:

$$x_{n+2}=16x_{n+1}-x_n, x_0=2, x_1=37. \tag{7}$$

对递归序列(7)取模 86,得到周期为 44 的剩余类序列:2,37,74,29,46,19,0,67,40,57,12,49,84,5,82,17,18,13,18,17,82,5,84,49,12,57,40,67,0,19,46,29,74,37,2,81,4,69,68,73,68,69,4,81,2,37,74,… 显然,对于任何整数 n, $x_n\not\equiv\pm3(\mathrm{mod}\ 86)$,所以(6)式不成立,故该情形不定方程(1)无整数解.

(Ⅶ)由 $x^2-x+1=903b^2$ 得:$(2x-1)^2-903(2b)^2=-3$,将 $x+1=3a^2$ 代入可得

$$(6a^2-3)^2-903(2b)^2=-3. \tag{8}$$

不定方程 $X^2-903Y^2=-3$ 的全部解由以下一个结合类给出:

$X+Y\sqrt{903}=\pm(x_n+y_n\sqrt{903})=\pm(30+\sqrt{903})(u_n+v_n\sqrt{903})=\pm(30+\sqrt{903})(601+20\sqrt{903})^n$, $n\in N$, (9)

其中 $30+\sqrt{903}$ 是 $X^2-903Y^2=-3$ 的基本解,$601+20\sqrt{7}$ 是 $X^2-903Y^2=1$ 的基本解.

由(9)式可知 y_n 为奇数,联立(8)、(9)式可知 $y_n=2b$ 为偶数,矛盾.所以该情形不定方程(1)无整数解.

可类似的证明情形(Ⅴ)与情形(Ⅷ)时不定方程(1)无整数解.

综上所述,不定方程(1)仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$.

参考文献:

[1] 柯召,孙琦.关于不定方程 $x^3\pm1=Dy^2$[J].中国科学,1989(12):1453-1457.
Ke Z,Sun Q. On the Diophantine equation $x^3\pm1=Dy^2$[J]. Scientia Sinica,1989(12):1453-1457.

[2] 曹珍富.丢番图方程引论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989:259-276.
Cao Z F. Introduction to Diophantine equations[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press,1989:259-276.

[3] 倪谷炎.关于不定方程 $x^3+1=Dy^2$[J].哈尔滨师范大学学报:自然科学版,1999(3):13-15.
Ni G Y. On the Diophantine equation $x^3+1=Dy^2$[J]. Journal of Harbin Normal University: Natural Science,1999(3):13-15.

[4] 罗明.关于不定方程 $x^3\pm1=14y^2$[J].重庆交通学院学报:自然科学版,1995,14(3):112-116.
Luo M. On the Indeterminate equation $x^3\pm1=14y^2$[J]. Journal of Chongqing Jiaotong Institute: Natural Science,1995,14(3):112-116.

[5] 罗明.关于不定方程 $x^3+1=7y^2$[J].重庆师范学院学报:自然科学版,2003(1):5-7.
Luo M. On the Indeterminate equation $x^3+1=7y^2$[J]. Journal of Chongqing Normal Univer-Sity: Natural Science,2003(1):5-7.

[6] 段辉明.关于不定方程 $x^3+1=86y^2$[J].高师理科学刊,2007,27(2):3-5.
Duan H M. On the Diophantine equation $x^3+1=86y^2$[J]. Journal of Science of Teachers' College and University,2007(2):3-5.

[7] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.
Ke Z,Sun Q. About indeterminate equation[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press,2011.

[8] 潘承洞,潘承彪.初等数论[M].北京:北京大学出版社,2003.
Pan C D,Pan C B. Elementary number theory[M]. Peking: Peking University Press,2003.

(责任编辑:尹 闯)