网络优先数字出版时间:2014-3-25
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140325.002.html
广西科学 Guangxi Sciences 2014,21(2):196～198

涉及分担值的两个亚纯函数族的正规定则*

Normal Criteria about Two Families of Meromorphic Functions Involving Shared Values

李运通[1],赖利平[2]

LI Yun-tong[1],LAI Li-ping[2]

(1.陕西铁路工程职业技术学院基础课部,陕西渭南　714000;2.西华师范大学管理学院,四川南充　637000)

(1.Department of Basic Courses,Shaanxi Railway Institute,Weinan,Shaanxi,714000,China;2.Management College of China West Normal University,Nanchong,Sichuan,637000,China)

摘要:讨论 2 个亚纯函数族涉及分担值的正规性,证明如下结论:设 F 和 G 为区域 D 上的 2 个亚纯函数族,a_1,a_2,a_3 为 3 个互不相同的复数,$k\geqslant 1,l\geqslant 0$ 为整数.若亚纯函数族 G 正规,且对 G 的任意子列 $g_n(z)$,有 $g_n\to g$,且 $g\not\equiv\infty$;若对任意的 $f\in F$,零点重数大于等于 $k+1$,且存在 $g\in G$,使得 $f^{(k)}(z)$ 和 $g^{(l)}(z)$ 分担 a_1,a_2,a_3,则 F 在 D 上正规.

关键词:亚纯函数　正规族　分担值

中图分类号:O174.52　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2014)02-0196-03

Abstract:We mainly discuss the normality of two families of meromorphic functions involving shared values, which was proved as follows: Let F and G be two families of functions meromorphic on a domain D. Let a_1,a_2,a_3 be three distinct complex numbers, $k\geqslant 1,l\geqslant 0$ be two integers. If G is normal, and for any subsequence $\{g_n(z)\}$ of G, $g_n\to g$, we have $g\not\equiv\infty$ on D. If for every $f\in F$, all zeros of $f(z)$ are of multiplicity at least $k+1$ in D, there exists $g\in G$ such that $f^{(k)}(z)$ and $g^{(l)}(z)$ share the values a_1,a_2,a_3, then F is normal on D.

Key words:meromorphic functions,normal family,shared value.

设 D 为定义在复平面 C 上的区域, F 为区域 D 内一族亚纯函数.如果对族中每一个函数序列 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 均可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)(k=1,2,\cdots)$ 在区域 D 上按球面距离一致收敛为一个亚纯函数或者恒为无穷,则称族 $\{f(z)\}$ 在区域 D 上正规.

设 f 与 g 为平面区域 D 上 2 个非常数的亚纯函数,a 为有穷复数,定义 $\overline{E_f}(a)=\{z\in D:f(z)=a\}$.称 f 与 g 以 a 为 IM 公共值,是指 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同,记作 $\overline{E_f}(a)=\overline{E_g}(a)$.称 f 与 g 以 a 为 CM 公共值,是指 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同,且零点的重数也相同[1,2].

文献[1]已证明:若区域 D 上亚纯函数族中的每一个函数不取 3 个互不相同的复数时,则该亚纯函数族正规.文献[3]证明:若区域 D 上亚纯函数族中的每一个函数不取 0 值,且其 k 阶导数不取一个非零有限复数时,则该亚纯函数族正规.最近,刘晓俊等[4]又证明了下述结果:

定理 A　设 F 和 G 为区域 D 上的两个亚纯函数族,a_1,a_2,a_3,a_4 为 4 个有限复数,且亚纯函数族 G 正规,若对任意的 $f\in F$,存在 $g\in G$,使得 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 a_1,a_2,a_3,a_4,则 F 在 D 上正规.

定理 A 给出反例说明分担值个数不能减少.那么自然产生疑问:当考虑导数时,是否可以减少分担值的个数.本文给出了肯定的回答.

收稿日期:2013-09-30
修回日期:2013-12-11
作者简介:李运通(1982-),硕士研究生,主要从事单复变函数研究。
*陕西铁路工程职业技术学院科研基金项目(2013-12)资助。

1 基本引理

引理 1[5](Zalcman 引理) 设 k 是一正整数,F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,对任意的 $f \in F$,f 的所有零点重数大于等于 k;若存在常数 $A \geqslant 1$,使得当 $f(z)=0$ 时,$|f^{(k)}(z)| \leqslant A$,则 F 在 $z_0 \in \Delta$ 的任一邻域内不正规的充要条件是存在:

(1) 函数列 $f_n \in F$;

(2) 复数列 $z_n \to z_0, z_n \in D$;

(3) 正数列 $\rho_n \to 0^+$;

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-k} f_n(z_n+\rho_n \xi) \to g(\xi)$ 按球面距离内闭一致收敛. 其中 $g(\xi)$ 为复平面上 C 的非常数亚纯函数,$g(\xi)$ 为有穷级,且 $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0)=kA+1$.

引理 2[6] 设 f 为复平面上一有限级超越亚纯函数,k 为正整数,$b \neq 0$ 为有限复数,f 的零点重级大于等于 $k+1$,则 $f^{(k)}-b$ 有无限多个零点.

引理 3[7] 设 f 为复平面上一有限级非常数亚纯函数,k 为正整数,$b \neq 0$ 为有限复数,f 的零点重级大于等于 $k+1$,若 $f^{(k)} \neq b$,则

$$f(z)=\frac{b}{k!} \frac{(z-a)^{k+1}}{z-b}(a \neq b).$$

引理 4[8](Hayman 不等式) 设 f 为复平面上一超越亚纯函数,k 为正整数,$b \neq 0$ 为有限复数,则当 $r \to \infty$ 有

$$T(r,f)<(2+\frac{1}{k}) N(r, \frac{1}{f})+(2+\frac{2}{k}) \overline{N}(r, \frac{1}{f^{(k)}-b})+S(r,f).$$

2 主要结果

定理 1 设 F 和 G 为区域 D 上的 2 个亚纯函数族,a_1, a_2, a_3 为 3 个互不相同的复数,$k \geqslant 1, l \geqslant 0$ 为整数. 若亚纯函数族 G 正规,且对 G 的任意子列 $g_n(z)$,有 $g_n \to g$,且 $g \not\equiv \infty$;若对任意的 $f \in F$,零点重数大于等于 $k+1$,存在 $g \in G$,使得 $f^{(k)}(z)$ 和 $g^{(l)}(z)$ 分担 a_1, a_2, a_3,则 F 在 D 上正规.

证明 若 F 在 D 上不正规,则至少存在一点 z_0 使得 F 在 z_0 不正规. 不失一般性,不妨假设 $z_0=0$. 则由 Zalcman 引理知,存在:函数列 $f_n \in F$;复数列 $z_n \to z_0, z_n \in D$;正数列 $\rho_n \to 0^+$ 使得

$$F_n(\xi)=\rho_n^{-k} f_n(z_n+\rho_n \xi) \to F(\xi) \quad (2.1)$$

按球面距离内闭一致收敛. 其中 $F(\xi)$ 为复平面上 C 的非常数亚纯函数,$F(\xi)$ 为有穷级,$F^{\#}(\xi) \leqslant F^{\#}(0)=1$,且其所有零点至少为 $k+1$ 重.

对应的,存在函数列 $g_n \in F$,使得 $g_n \to g$. 因为 g_n 和 g 都是亚纯函数,所以在 D 上除 g 的极点外有 $g_n^{(l)}(z) \to g^{(l)}(z)$. 则存在点 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$,使得在邻域 $U(z_0)$ 内 $g^{(l)}(z)$ 至少不取值 a_1, a_2 和 a_3 中的 2 个. 不妨设 $g^{(l)}(z) \neq a_1, a_2$,则当 n 充分大时,在邻域 $U(z_0)$ 内有 $g_n^{(l)}(z) \neq a_1, a_2$. 由假设可知 $F_n{}^{(k)}(\xi)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n \xi) \neq a_1, a_2$

情形 1 若 a_1, a_2 均为有限复数.

我们断言:$F^{(k)}(\xi) \neq a_1, a_2$. 否则,存在 ξ_0 使得 $F^{(k)}(\xi_0)=a_1$. 首先 $F^{(k)}(\xi_0) \not\equiv a_1$,否则 $F(\xi)$ 为 k 次多项式,与 $F(\xi)$ 为零点重数至少为 $k+1$ 重的非常数亚纯函数事实相矛盾. 由 Hurwitz 定理可知,存在点列 $\xi_n \to \xi_0$ 使得 $F_n^{(k)}(\xi_n)=a_1$,矛盾. 同理:$F^{(k)}(\xi) \neq a_2$.

若 a_1, a_2 为非零有限复数,由引理 2 知 $F(\xi)$ 为有理函数,由于 $F^{(k)}(\xi) \neq a_1, a_2$,由引理 3 得出矛盾.

若 a_1, a_2 中有一个为 0,由于 $F^{(k)}(\xi) \neq a_1, a_2$,又由于 $F(\xi)$ 的零点重数大于等于 $k+1$,所以 $F(\xi) \neq 0$ 为超越亚纯函数,由 Hayman 不等式可得矛盾.

情形 2 若 a_1, a_2 有一个为无穷. 不妨设 $a_1=\infty$,由情形 1 类似方法可得:$F^{(k)}(\xi) \neq a_2$ 为全纯函数,由引理 2 和引理 3 可得矛盾.

综上所述定理 1 得证.

例 1 设 $F=\{f_n(z)=nz^k\}, G=\{g_n(z)=(z+\frac{1}{n})^k\}, D=\{z:|z|<1\}$. 易知 $f_n^{(k)}=nk!, g_n^{(k)}=k!$,所以在 D 上 $f^{(k)}(z)$ 和 $g^{(k)}(z)$ 分担不等于 $nk!$ 和 $k!$ 的任意复数. 显然有 G 的任意子列 $g_n \to z^k$ 在 D 上正规,而 F 在点 $z=0$ 处不正规.

例 2 设 $F=\{f_n(z)=\frac{n(z+\frac{1}{n})^{k+1}}{(k+1)!}\}, G=\{g_n(z)=\frac{(z+1-\frac{1}{n})^{k+1}}{(k+1)!}\}, D=\{z:|z|<1\}$. 易知 $f_n^{(k)}=nz, g_n^{(k)}=z+1-\frac{1}{n}$,所以在 D 上 $f^{(k)}(z)$ 和 $g^{(k)}(z)$ 分担 1. 显然有 G 的任意子列 $g_n \to \frac{(z+1)^{k+1}}{(k+1)!}$ 在 D 上正规,而 F 在点 $z=0$ 处不正规.

例 3 设 $F=\{f_n(z)=\frac{1}{nk!\,z}\}, G=\{g_n(z)=\frac{(k+1)!\,z^{2k+1}}{(2k+1)!}+(1-\frac{(-1)^k}{n}) \frac{z^k}{k!}\}, D=\{z:|z|<\frac{1}{2}\}$. 易知 $f_n^{(k)}=\frac{(-1)^k}{nz^{k+1}}, g_n^{(k)}=z^{k+1}+1-\frac{(-1)^k}{n}$,当 n 充分大时,在 D 上有 $f_n^{(k)} \neq 0, g_n^{(k)} \neq 0$,并且有 $f^{(k)}(z)$ 和 $g^{(k)}(z)$ 分担 1. 显然有 G 的任意子列 $g_n \to$

$\frac{(k+1)!\ z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{z^k}{k!}$ 在D上正规，而F在点$z=0$处不正规.

例 1 说明定理 1 中对零点重数的限制不能再降低，例 2 和例 3 说明定理 1 分担值的个数不能再减少.

参考文献：

[1] Schiff J. Normal families[M]. Berlin：Springer-Verlag，1993.

[2] 顾永兴，庞学诚，方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2007.
Gu Y X，Pang X C，Fang M L. Normal families and its application[M]. Beijing：Science Press，2007.

[3] Liu X J，Li S H，Pang X C. A normal criterion about two families of meromorphic functions concerning shared values[J]. Acta Mathematica Sinica：English Series，2013(1)：151-158.

[4] 顾永兴. 亚纯函数族的一个正规定则[J]. 中国科学：数学专辑，1979(S1)：267-274.
Gu Y X. Criteria for normality of a family of mereromorphic functions[J]. Scientia Sinica：Mathematics Special Issue，1979(S1)：267-274.

[5] Zalcman L. Normal families：new perspectives[J]. Bull Amer Math，1998(35)：215-230.

[6] Bergwiler W，Eremenko A E. On the singularities of the inverse to a meromerphic function of finite order[J]. Rev Mat Iberoamericana，1995(11)：355-373.

[7] Wang Y F，Fang M L. Picard values and normal families of meromerphic function with zeros[J]. Acta Mathematica Sinica，English Series，1998(14)：17-26.

[8] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford：Clarendon Press，1964.

（责任编辑：尹　闯）