DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.04.019

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(4):345～347

具变指数非线性拟抛物方程弱解的唯一性*

Uniqueness of Weak Solutions for a Class of Nonlinear Pseudoparabolic Equation with Variable Exponent

郭金勇,莫明忠,潘玉美

GUO Jin-yong,MO Ming-zhong,PAN Yu-mei

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)

(Department of Mathematics and Computer Science,Liuzhou Teachers College,Liuzhou,Guangxi,545004,China)

摘要:在一些初值的假定下,利用 Steklov 均值证明了一类具变指数非线性拟抛物方程弱解的唯一性.

关键词:非线性拟抛物方程 变指数 弱解 唯一性

中图法分类号:O175.26 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2013)04-0345-03

Abstract:Under some assumptions on the initial value,the uniqueness of weak solutions for a class of nonlinear pseudoparabolic equation with variable exponent was proved by using the Steklov mean.

Key words:nonlinear pseudoparabolic equation,variable exponent,weak solution,uniqueness

非线性拟抛物方程(如 GBBM 方程、粘性扩散方程等)是在物理、化学、经济和人口等大量实际问题中提出的一类重要的非线性发展方程.研究已表明具退化和奇性的非线性拟抛物方程就来源于自然界中广泛存在的扩散现象.

在非线性拟抛物方程整体解的存在性方面已有许多结果.文献[1]提出 GBBM 方程

$$u_t - \Delta u_t + \nabla \cdot \varphi(u) = f(u)$$

的初值问题,应用 Galerkin 方法构造逼近解,通过抽取逼近解的收敛子列并取极限得到整体光滑解的存在性,还证明了整体解的唯一性,讨论了解的渐近行为和"爆破"现象.变指数非线性拟抛物方程的初边值问题是指

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \triangle u}{\partial t} = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) - \delta |u|^{p(x)-2} u, x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$u = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \quad (3)$$

其中 $\Omega \subset R^N$ 为具光滑边界的有界域,$\delta > 0$ 为参数,指数 $p(x)$ 为定义于$\overline{\Omega}$上的连续函数,$u_0(x)$ 为初值函数,$\gamma > 0$ 为粘性系数,$\gamma \frac{\partial \triangle u}{\partial t}$ 表示粘性松驰因子或粘性.当 $\gamma = 0$ 且 $p(x)$ 为常数时,方程(1)为已知的 p - Laplace 发展方程.

对于方程(1),当 $p(x)$ 为常数时该方程具有类似文献[1]中提出的 GBBM 方程形式,而且文献[2,3]已证明此时方程弱解的存在性和唯一性.文献[4]研究了非线性拟抛物方程

$$\partial_t (u - u_{xx}) - \alpha u_{xx} = \lambda |u| u$$

的初值问题,证明其整体解的存在性,并讨论了解的渐近性.

文献[1,4]研究的方程具有共同的特点:算子的指数是确定的数值.而近年来,在弹性力学、电流变学、图像恢复、多方渗流、变分方法等领域的研究中,人们注意到一类具有"逐点异性"的物理现象.这种现象在数学上表现为,具有变指数增长性条件的非线性问题.关于这种问题的研究也有较多结果[5~7].

本文把方程(1)中 $p(x)$ 由常量扩展至变量,利用 Steklov 均值证明初边值问题弱解的唯一性(弱解的存在性见文献[8]).

为叙述方便,假设 $\gamma = \delta = 1$.因为当 $\gamma \neq 1, \delta \neq 1$ 时,证明方法相同.为讨论问题(1)～(3),需要用到空间 $W^{k,p(x)}(\Omega)$,而关于 $W^{k,p(x)}(\Omega)$ 空间的理论详见

收稿日期:2013-01-22

修回日期:2013-03-14

作者简介:郭金勇(1962-),男,副教授,主要从事偏微分方程研究。

*广西教育厅科研项目(201204LX502)资助。

文献[5,9,10].

引理1 设 $u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$, 对 $\varphi \in L^\infty(t_1,t_2;W_0^{1,p(x)}(\Omega))$ 及 $\varphi_t \in L^2(t_1,t_2;H^1(\Omega))$, 问题(1)～(3)中的弱解 u 在 $Q_T=\Omega\times(0,T)$ 上满足

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x,t_1)\nabla\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla u\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi + |u|^{p(x)-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x,t_2)\nabla\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地,对 $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega (u(x,t_1)-u(x,t_2))\varphi\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla(u(x,t_1)-u(x,t_2))\nabla\varphi\mathrm{d}x - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi - |u|^{p(x)-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

证明 由 $\varphi \in L^\infty(t_1,t_2;W_0^{1,p(x)}(\Omega))$ 及 $\varphi_t \in L^2(t_1,t_2;H^1(\Omega))$ 知,存在函数序列 $\{\varphi_k\}$,对固定的 $t \in (t_1,t_2)$, $\varphi(\cdot,t) \in C_0^\infty(\Omega)$,当 $k\to\infty$ 时

$$\|\varphi_{kt}-\varphi_t\|_{L^2(t_1,t_2;H^1(\Omega))} \to 0,\ \|\varphi_k - \varphi\|_{L^\infty(t_1,t_2;W_0^{1,p(x)}(\Omega))} \to 0.$$

选取函数 $j(s) \in C_0^\infty(R)$,使得

$$j(s) \geqslant 0, s\in R; j(s)=0, \forall\ |s|>1;\ \int_R j(s)\mathrm{d}s = 1.$$

对 $h>0$,定义 $j_h(s)=\frac{1}{h}j(\frac{s}{h})$,且

$$\eta_h(t) = \int_{t-t_2+2h}^{t-t_1-2h} j_h(s)\mathrm{d}s.$$

显然对任意的 $t\in(t_1,t_2)$, $\eta_h \in C_0^\infty(t_1,t_2)$,有 $\lim\limits_{h\to 0^+}\eta_h = 1$. 又在弱解定义中选择 $\varphi=\varphi_k(x,t)\eta_h(t)$,则

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_{kt}\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_{kt}\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi_k\eta_h - |u|^{p(x)-2}u\varphi_k\eta_h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

注意到

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega (u\varphi_k)|_{t=t_1}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega (u\varphi_k)|_{t=t_1} j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t_1+h<t<t_1+3h}\int_\Omega |(u\varphi_k)|_t - (u\varphi_k)|_{t_1}|\mathrm{d}x,$$

且 $u\in C(0,T;L^2(\Omega))$,所以当 $h\to 0$ 时,上式右端 $\to 0$. 类似地,当 $h\to 0$ 时,有

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega (u\varphi_k)|_{t=t_2}\mathrm{d}x\right| \to 0,$$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi_k)|_{t=t_1}\mathrm{d}x\right| \to 0,$$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi_k)|_{t=t_2}\mathrm{d}x\right| \to 0.$$

令 $h\to 0$, $k\to\infty$,得

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x,t_1)\nabla\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla u\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi + |u|^{p(x)-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x,t_2)\nabla\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地,对 $\varphi\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,有

$$\int_\Omega (u(x,t_1)-u(x,t_2))\varphi\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla u(x,t_1) - \nabla u(x,t_2))\nabla\varphi\mathrm{d}x - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi - |u|^{p(x)-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

证毕.

注1 固定 $\tau\in(0,T)$,令 h 满足 $0<\tau<\tau+h<T$,再令 $t_1=\tau$, $t_2=\tau+h$,并用 $\frac{1}{h}$ 乘以(4)式两边. 那么对 $\varphi\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,得到

$$\int_\Omega (u_h(x,\tau))_\tau\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega ((\nabla u)_h(x,\tau))_\tau\nabla\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)_h(x,\tau)\nabla\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega (|u|^{p(x)-2}u)_h(x,\tau)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{5}$$

其中 u_h 表示 u 的 Steklov 均值,即

$$u_h(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau, & t\in(0,T-h), \\ 0, & t>T-h. \end{cases}$$

定理1 问题(1)～(3)仅有一个弱解.

证明 假设 u_1, u_2 为问题(1)～(3)的两个弱解. 由(5)式有

$$\int_\Omega (u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau))_{h\tau}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega ((\nabla u_1 -$$

$\nabla u_2)_h(x,\tau))_\tau \nabla\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega(|\nabla u_1|^{p(x)-2}\nabla u_1-$
$|\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2)_h(x,\tau)\nabla\varphi(x)\mathrm{d}x+$
$\int_\Omega(|u_1|^{p(x)-2}u_1-|u_2|^{p(x)-2}u_2)_h(x,\tau)\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$

对固定的 τ**,取** $\varphi(x)=(u_1-u_2)_h\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$**,得**

$$\int_\Omega(u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau))_{h\tau}(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla(u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau))_{h\tau}\nabla(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x=$$
$$-\int_\Omega[(|\nabla u_1|^{p(x)-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2)_h]\cdot(x,\tau)\nabla(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x-\int_\Omega(|u_1|^{p(x)-2}u_1-|u_2|^{p(x)-2}u_2)_h(x,\tau)(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x.$$

在区间$(0,t)$ **上,把上式关于** τ **积分,得**

$$\int_\Omega|(u_1-u_2)_h|^2(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla(u_1-u_2)_h|^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

从而

$$\int_\Omega|(u_1-u_2)_h|^2\mathrm{d}x=0;$$

因此 $u_1=u_2$. **证毕.**

参考文献:

[1] Guo B L. Initial boundary value problem for one class of system of multidimensional inhomogeneous GBBM equations[J]. Chin Ann of Math,1987,8B(2):226-239.

[2] **郭金勇.一个粘性非线性源的** p-Laplace **发展方程弱解的存在性**[J].**钦州学院学报**,2006,6:10-13.

[3] **郭金勇.一个粘性非线性源的** p-Laplace **发展方程弱解的唯一性**[J].**柳州师专学报**,2007,2:112-114.

[4] Kaikina E I. Initial-boundary value problem for nonlinear pseudoparabolic equations in a critical case[J]. Electronic JDE,2007:1-25.

[5] Kovǘcík O,Rákosník J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$[J]. Czechoslovak Math J,1991,4:592-618.

[6] Fan X,Zhang Q. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem[J]. Nonlinear Analysis,TMA,2003,52:1843-1852.

[7] Fan X,Zhao D. The quasi-minimixer of integral functions with $m(x)$ growth conditions[J]. Nonlinear Analysis,TMA,2000,39:807-816.

[8] **郭金勇.具变指数非线性拟抛物方程弱解的存在性**[J].**数学的实践与认识**,2012,42(12):222-229.

[9] Fan X,Shen J,Zhao D. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$[J]. J Math Anal Appl,2001,262:749-760.

[10] Fan X,Zhao D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$[J]. J Math Ana Appl,2001,263:424-446.

(责任编辑:尹　闯)

广西发现世界首例缺失型α地中海贫血突变基因

新闻时间:2013-11-07

记者5日从广西壮族自治区人民医院获悉,经过近2年的研究,该院检验科主管技师李友琼等医务人员发现了世界首例缺失型α地中海贫血突变基因,并于日前在美国DNA数据库成功注册。这一新突变基因的发现,不仅丰富了世界地中海贫血突变基因数据库,同时为在临床上避免地贫患儿的降生及科学研究提供了新的参考信息。

据介绍,该例缺失型α地中海贫血突变基因由李友琼等医务人员于2011年首次发现,携带者是当时到该院做产前检查的一名孕妇。经过血红蛋白电泳、地贫基因筛查分析和相关医学科研院校的研究,并借助基因公司深度测序平台的检测手段,最终于2012年底完成基因的鉴定工作。鉴定工作完成后,李友琼向世界三大DNA数据库之一的美国国立生物技术信息中心(NCBI)的GenBank提交注册申请。通过NCBI数据库专家的审核认定,该新突变基因申请注册成功,并于2013年10月1日起正式对外开放数据查询。

作为一种遗传性血液病,地中海贫血在全球分布广泛,以α和β地中海贫血最为常见,前者主要见于东南亚、我国南方和少数非洲地区等地;后者主要高发于地中海地区、东南亚、我国南方、中东等地。李友琼介绍,对于地中海贫血医学界尚无有效治疗手段,新突变基因的发现和成功鉴定对于从根本上预防和研究这一疾病有着重大现实意义,也为日后进行基因治疗奠定了理论基础。

摘自新华网