DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.02.018

艾拉姆咖分布次序统计量的性质*

Properties of Order Statistics on Эрланга Distribution

龙 兵

LONG Bing

(荆楚理工学院数理学院,湖北荆门 448000)

(Department of Mathematics and Physics,Jingchu University of Technology,Jingmen,Hubei,448000,China)

摘要:研究艾拉姆咖分布次序统计量的性质,给出其密度函数,数学期望和方差,证明它的间隔不独立且不同分布.

关键词:艾拉姆咖分布 次序统计量 数学期望 方差

中图法分类号:O212.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2013)02-0101-02

Abstract:The properties of order statistics are studied on Эрланга distribution. Its density function, mathematical expectation and variance are given, and its interval is demonstrated to be not independent and different distribution.

Key words:Эрланга distribution,order statistics,mathematical expectation,variance

艾拉姆咖分布最早由俄罗斯的研究人员在研究武器装备的维修时间时引入,此分布在装备的维修理论中具有重要的作用.国内对这类分布统计的性质进行研究的学者很少.文献[1]对艾拉姆咖分布的特点进行分析,还在全样本场合下运用极大似然法对分布的参数进行估计,并通过实例验证了这种分布的可行性和实用性.文献[2]研究艾拉姆咖分布的小样本区间估计和检验问题,并运用实例证实在对装备维修工时的估计时,用艾拉姆咖分布进行估计的精度比用指数分布高.文献[3]在定数截尾样本下研究参数的极大似然估计,并在全样本场合下给出参数的精确区间估计和近似区间估计,最后用实例说明精确区间估计优于近似区间估计.本文给出艾拉姆咖分布次序统计量的密度函数,计算其数学期望和方差,并且证明次序统计量的间隔不独立,且不同分布.

1 预备知识

艾拉姆咖分布的分布函数和密度函数分别为

$$F(x)=1-(1+\frac{2x}{\theta})e^{-\frac{2x}{\theta}}, \tag{1}$$

$$f(x)=\frac{4x}{\theta^2}e^{-\frac{2x}{\theta}}, \tag{2}$$

式中 $x>0$,参数 $\theta>0$.

引理[4] 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,公共分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$,$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 为其次序统计量,则

(i)$(X_{(i)},X_{(j)})(i<j)$ 的联合密度函数为

$$f_{ij}(y,z)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(y)]^{i-1}[F(z)-F(y)]^{j-i-1}[1-F(z)]^{n-j}f(y)f(z),$$

其中,$y\leqslant z$.

(ii) 第 i 个次序统计量 $X_{(i)}$ 的密度函数为

$$f_i(x)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F^{i-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}f(x).$$

特别地,$X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的密度函数分别为

$$f_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x),f_n(x)=nF^{n-1}(x)f(x).$$

2 次序统计量的性质

设 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 是来自艾拉姆咖分布(1)的 n 个次序统计量,则第 i 个次序统计量 $X_{(i)}$ 的密度函数为

$$f_i(x)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}[1-$$

收稿日期:2012-09-29

修回日期:2012-11-01

作者简介:龙 兵(1973-),男,副教授,主要从事为数理统计研究。

*荆楚理工学院院级科研项目(ZR201020),2013 年湖北省教育厅重点科学技术研究项目(D20134301)资助。

$$F(x)]^{n-i}f(x)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\cdot\frac{4x}{\theta^2}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}(-1)^j\left(1+\frac{2x}{\theta}\right)^{n-i+j}e^{-\frac{2(n-i+j+1)x}{\theta}}=\frac{4n!}{(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n-i+j}\binom{i-1}{j}\binom{n-i+j}{k}\cdot(-1)^j\frac{2^kx^{k+1}}{\theta^{k+2}}e^{-\frac{2(n-i+j+1)x}{\theta}},x>0.$$

第 i 个次序统计量 $X_{(i)}$ 的 k(k 为正整数)阶原点矩为

$$E(X_{(i)}^k)=\frac{4n!}{(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n-i+j}\binom{i-1}{j}\binom{n-i+j}{k}\cdot(-1)^j\frac{2^k}{\theta^{k+2}}\int_0^{+\infty}x^{m+k+1}e^{-\frac{2(n-i+j+1)x}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{n!\theta^m}{2^m(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n-i+j}\binom{i-1}{j}\binom{n-i+j}{k}\cdot(-1)^j\frac{(m+k+1)!}{(n-i+j+1)^{m+k+2}}.$$

当 $k=1$ 时,$X_{(i)}$ 的数学期望为

$$E(X_{(i)})=\frac{n!\theta}{2(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n-i+j}\binom{i-1}{j}\binom{n-i+j}{k}\cdot(-1)^j\frac{(k+2)!}{(n-i+j+1)^{k+3}}.$$

当 $k=2$ 时,$X_{(i)}$ 的二阶原点矩为

$$E(X_{(i)}^2)=\frac{n!\theta^2}{4(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n-i+j}\binom{i-1}{j}\binom{n-i+j}{k}\cdot(-1)^j\frac{(k+3)!}{(n-i+j+1)^{k+4}}.$$

因此,第 i 个次序统计量 $X_{(i)}$ 的方差为

$$D(X_{(i)})=\frac{n!\theta^2}{4(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n-i+j}\binom{i-1}{j}\binom{n-i+j}{k}\cdot(-1)^j\frac{(k+3)!}{(n-i+j+1)^{k+4}}-\left[\frac{n!\theta}{2(i-1)!(n-i)!}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n-i+j}\binom{i-1}{j}\binom{n-i+j}{k}\cdot(-1)^j\frac{(k+2)!}{(n-i+j+1)^{k+3}}\right]^2.$$

特别地,当 $i=1$ 时最小次序统计量 $X_{(1)}$ 的密度函数为

$$f_1(x)=4n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{2^k}{\theta^{k+2}}x^{k+1}e^{-\frac{2nx}{\theta}},x>0.$$

可以看到,上式为伽玛分布密度函数的线性组合.

$X_{(1)}$ 的数学期望为

$$E(X_{(1)})=\frac{\theta}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(k+2)!}{n^{k+2}}.$$

$X_{(1)}$ 的方差为

$$D(X_{(1)})=\frac{\theta^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(k+3)!}{n^{k+3}}-\frac{\theta^2}{4}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(k+2)!}{n^{k+2}}\right]^2.$$

当 $i=n$ 时,最大次序统计量 $X_{(n)}$ 的密度函数为

$$f_n(x)=4n\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\binom{n-1}{j}\binom{j}{k}\cdot(-1)^j\frac{2^kx^{k+1}}{\theta^{k+2}}e^{-\frac{2(j+1)x}{\theta}},x>0.$$

$X_{(n)}$ 的数学期望为

$$E(X_{(n)})=\frac{n\theta}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\binom{n-1}{j}\binom{j}{k}\cdot(-1)^j\frac{(k+2)!}{(j+1)^{k+3}}.$$

$X_{(n)}$ 的方差为

$$D(X_{(n)})=\frac{n\theta^2}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\binom{n-1}{j}\binom{j}{k}\cdot(-1)^j\frac{(k+3)!}{(j+1)^{k+4}}-\left[\frac{n\theta}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\binom{n-1}{j}\binom{j}{k}(-1)^j\frac{(k+2)!}{(j+1)^{k+3}}\right]^2.$$

定理 设 X_1,X_2 独立同分布,且都服从(1)式的艾拉姆咖分布,$X_{(1)},X_{(2)}$ 为其次序统计量,则其次序统计量的间隔 $X_{(1)},X_{(2)}-X_{(1)}$ 不独立,且不同分布.

证明 由于$(X_{(1)},X_{(2)})$的密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\frac{n!}{(n-2)!}f(x_1)f(x_2)[1-F(x_2)]^{n-2}=\frac{16n(n-1)}{\theta^4}x_1\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\frac{2^k}{\theta^k}x_2^{k+1}e^{-\frac{2x_1+2(n-1)x_2}{\theta}},0<x_1\leqslant x_2<+\infty.$$

令 $Y_1=X_{(1)},Y_2=X_{(2)}-X_{(1)}$,则 $x_1=y_1,x_2=y_1+y_2$,由于其雅可比行列式 $J=1$,得到(Y_1,Y_2)的联合密度函数为

$$g(y_1,y_2)=f(y_1,y_1+y_2)\mid J\mid=\frac{16n(n-1)}{\theta^4}y_1(y_1+y_2)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\frac{2^k}{\theta^k}(y_1+y_2)^ke^{-\frac{2y_1+2(n-1)(y_1+y_2)}{\theta}}=16n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{n-2}{k}\binom{k+1}{j}\frac{2^k}{\theta^{k+4}}y_1^{k-j+2}y_2^je^{-\frac{2ny_1+2(n-1)y_2}{\theta}},$$

$0<y_1\leqslant y_1+y_2$,

因此 Y_1 的密度函数为

$$g_1(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y_1,y_2)\mathrm{d}y_2=16n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{n-2}{k}\binom{k+1}{j}\frac{2^k}{\theta^{k-j+3}}\cdot\frac{y_1^{k-j+2}e^{-\frac{2ny_1}{\theta}}j!}{[2(n-1)]^{j+1}},$$

$y_1>0$.

(下转第 106 页 Continue on page 106)

$g(a)$. 易证 $\| a+c \| \to 2$, $\| a+b \| = (\sum_{i=1}^{\infty}(\| x_{n_0}^i \| + \| x_i \|)^p)^{\frac{1}{p}} \geqslant (\sum_{i=1}^{\infty}(f(x_{n_0}^i) + \| x_i \|)^p)^{\frac{1}{p}} = \| a+c \|$. 故有 $\| a+b \| \to 2$. 因为 l^p 是一致凸,则有 $b \to a, c \to a$,即

$$f_i(x_{n_0}^i) \to \| x_i \|, \| x_{n_0}^i \| \to \| x_i \|. \qquad (1)$$

1) 若 $x_i \neq 0$, 则 $f_i(\frac{x_{n_0}^i}{\| x_{n_0}^i \|}) \to 1$. 类似可证 $f_i(\frac{x_{n_j}^i}{\| x_{n_j}{}^i \|}) \to 1, j = 0,1,\cdots,k$. 故有 $f_i(\sum_{j=0}^{k} \frac{x_{n_j}^i}{\| x_{n_j}^i \|}) \to k+1$. 而 X_i 是 ω-强凸,所以 $\{\frac{x_n^i}{\| x_n^i \|}\}$ 是相对紧集. 因此有 $\frac{x_n^i}{\| x_n^i \|} \to \frac{x_i}{\| x_i \|}$. 由(1)式得 $x_n^i \to x_i$.

2) 若 $x_i = 0$,显然 $\frac{x_n^i}{\| x_n^i \|} \to \frac{x_i}{\| x_i \|}$ 成立. 由引理4知 $x_n \to x$. 所以 $\{x_n\}$ 是相当紧集,即 $l^p(X_i)$ 是 ω-强凸的.

例1 存在一个无穷维 X 是 ωDC,但 X 不是 $(k-1)DC$.

证明 设 $k \geqslant 2, k \in N^+, i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. 对每一个 $x = (a_1, a_2, \cdots) \in l^2$,令

$$\| x \|_{i_1,i_2,\cdots,i_k}^2 = (\sum_{j=1}^{k} | a_{ij} |)^2 + \sum_{i \neq i_1,i_2,\cdots,i_k} a_i^2.$$

由文献[12]知, $x_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = (l^2, \| \cdot \|_{i_1,i_2,\cdots,i_k})$ 是 kUR,从而 X 是 kDC. 由定理2知, X 是 ωDC,但 X 不是 $(k-1)DC$. 令 $e_{ij} = (\underbrace{0,0,\cdots,1}_{i},0,\cdots), j = 1,2,\cdots,k$,则 $\| e_{ij} \|_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = 1, j = 1,2,\cdots,k$,而且 $\{e_{ij}\}_{j=1}^{k}$ 是线性无关的, $\sum_{j=1}^{k} \| e_{ij} \|_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = k$,故 $x_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ 不是 $(k-1)$ 严格凸,因而 $x_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ 不是 $(k-1)DC$.

参考文献:

[1] Wei W Z, Xu H B. Some properties of k - drop convex spaces[J]. Journal of Mathematics, 2004, 24(2): 168-172.

[2] Suyalatu W. Some geometric properties related to smoothness of Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 723-734.

[3] 乌日柴胡,苏雅拉图. 关于 ω-强凸的一点注记[J]. 数学杂志, 2012, 32(1): 167-172.

[4] 方习年. 关于 Banach 空间 k-致凸及 k-致光滑性[J]. 数学研究与评论, 2000, 20(4): 583-587.

[5] 刘培德. 泛函分析基础[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2002.

[6] 郑喜印. 紧-凸性与紧-光滑性[J]. 数学进展, 1995, 24(4): 342-347.

[7] 俞鑫泰. Banach 空间的几何理论[M]. 上海:华东师范大学出版社, 1986.

[8] Leonard I E. Banach sequences spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1976(54): 245-265.

[9] 周文,巩万中. k-drop 凸空间与 k-drop 凸空间[J]. 应用泛函分析学报, 2008, 10(4): 373-377.

[10] Bernal J, Sullivan F. Muli-dimenional volumes, supper reflexivity and formal structure in Banach space[J]. Illinois J Math, 1983, 27: 501-515.

[11] 宋寿柏. 紧局部完全 ω 凸空间[J]. 数学杂志, 1994, 14(1): 28-32.

[12] Borluh L, Yu X T. On the k - uniform rotund and the fully convex Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1985, 110(2): 407-410.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第102页 Continue from page 102)

Y_2 的密度函数为

$$g_2(y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, y_2) \mathrm{d}y_1 = 16n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{n-2}{k}\binom{k+1}{j}\frac{2^k(k-j+2)!}{\theta^{j+1}(2n)^{k-j+3}} \cdot y_2^j e^{-\frac{2(n-1)y_2}{\theta}}, y_2 \geqslant 0.$$

由于 $g(y_1, y_2) \neq g_1(y_1) g_2(y_2)$,且 $g_1(y_1)$ 与 $g_2(y_2)$ 的密度函数不相同,所以 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)} - X_{(1)}$ 不独立,且不同分布.

推论 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布,且都服从(1)式的艾拉姆咖分布, $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 为其次序统计量,则其次序统计量的间隔 $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \cdots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ 不独立,且不同分布.

参考文献:

[1] 吕会强,高连华,陈春良. 艾拉姆咖分布及其在保障性数据分析中的应用[J]. 装甲兵工程学院学报, 2002, 16(3): 48-52.

[2] 潘高田,王保恒,陈春良,等. 艾拉姆咖分布小样本区间估计和假设问题研究[J]. 数理统计与管理, 2009, 28(3): 468-472.

[3] 顾蓓青,王蓉华,徐晓岭. 艾拉姆咖分布的统计分析[C]. 2011年全国机械行业可靠性技术学会暨第四届可靠性工程分会第三次全体委员大会论文集, 2011: 65-67.

[4] 茆诗松,程依明,濮晓龙,等. 概率论与数理统计教程[M]. 第2版. 北京:高等教育出版社, 2011: 271-276.

(责任编辑:尹　闯)