

电动助力转向系统动力学模型及其零点稳定性分析*

Analysis on Modeling Electric Power Steering System and Its Zero Stability

宁胜花¹, 谭光兴²

NING Sheng-hua¹, TAN Guang-xing²

(1. 上汽通用五菱汽车股份有限公司, 广西柳州 545007; 2. 广西科技大学电气与信息工程学院, 广西柳州 545006)

(1. College of Electrical and Information Engineering, Guangxi University of Technology, Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要:在任意转向角度的情况下, 依据汽车轮胎侧偏特性, 建立电动助力转向(EPS)系统动力学模型. 应用 Lyapunov 稳定性理论分析模型的参数对模型零点稳定性的影响, 并结合汽车转向部件的实际特性, 给出模型零点稳定性时的充分条件.

关键词:电动助力转向 动力学模型 Lyapunov 函数 稳定性

中图分类号: O175, U463.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2013)02-0095-04

Abstract: According to the tire cornering characteristics, the EPS system dynamics model is established from any steering angle of the car, on which the model parameters on the zero stability of the EPS system dynamics model is analyzed by constructing Lyapunov function. Combined with the actual characteristics of the car steering parts, the sufficient conditions is given for the model zero stability. The critical instability speed of the EPS system can be determined in accordance with the conditions and structural parameters of the given vehicle model, which provides a theoretical basis for EPS research and development.

Key words: electric power steering (EPS), dynamics model, lyapunov function, stability

近年来, 电动助力转向(Electric Power Steering, 简称 EPS)系统已成为汽车技术发展的一个关键环节, 其性能关系到汽车行驶的稳定性 and 安全性. 国外的研究人员曾采用几种不同自由度的 EPS 系统动力学模型分析 EPS 系统对汽车稳定性的影响, 国内也有一些学者对 EPS 动力学模型的稳定性进行过研究. 刘照等^[1]将三自由度的转向系统动力学模型和车辆横向动力学模型相结合, 以频域法分析影响系统稳定性的因素. 但由于 EPS 系统是一个多变量非线性系统, 频域分析还不能全面地反映影响电动助力转向系统的因素. 文献^[2]将五自由度的 EPS 系统动力学模型与驾驶员模型结合, 构造汽车非线性闭环 EPS

系统模型, 并用常微分方程稳定性理论研究整车参数对汽车稳定性的影响. 以上研究只是针对汽车小转角情况进行 EPS 稳定性分析. 为了简化模型并能全面地分析系统的稳定性, 本文在汽车任意转角的情况下, 建立 EPS 系统的动力学模型, 并针对 EPS 系统的平衡点, 应用 Lyapunov 稳定性理论^[3]分析了 EPS 系统稳定性与模型物理参数的相互联系. 同时给出一组系统的结构参数, 并计算得到该参数下系统的临界失稳速度. 系统临界失稳速度随系统的结构参数值变化而改变, 在实际 EPS 系统的设计中可以尝试对满足条件的模型参数进行组合, 从而选择符合实际需要的最佳模型参数.

1 EPS 系统的动力学模型

1.1 两自由度操纵模型

最简单的车辆操纵模型可以由一单质量刚体来表示, 在外力和外力矩作用下, 该刚体具有三个自由

收稿日期: 2012-09-28

修回日期: 2013-02-10

作者简介: 宁胜花(1984-), 女, 工程师, 主要从事新能源汽车转向系统研究.

* 广西自然科学基金项目(编号: 2010GXNSFA013126)资助.

广西科学 2013年5月 第20卷第2期

度,即纵向运动、侧向运动和横摆运动^[4].当汽车在水平面内以一定的速度行驶时,可忽略汽车的纵向运动,即可将汽车近似的看成两自由度的线性系统(1.1)和(1.2).

$$mv(\beta' + \omega) + (K_f + K_r)\beta + \frac{L_1 K_f - L_2 K_r}{v} \omega = K_f \delta, \quad (1.1)$$

$$I_z \omega' + \frac{L_2^2 K_r + L_1^2 K_f}{v} \omega + (L_1 K_f - L_2 K_r)\beta = L_1 K_f \delta, \quad (1.2)$$

式中, m 、 v 、 I_z 分别为汽车质量、车速和绕重心垂直轴的转动惯量; β 、 δ 、 ω 分别为汽车质心侧偏角、前轮转角、横摆角速度; L_1 、 L_2 分别为汽车质心到前、后轴的水平距离; K_f 、 K_r 分别为前、后轮的侧偏刚度.

1.2 轮胎侧偏模型

轮胎侧偏特性是研究汽车的操作稳定性的基础^[5].在侧偏角小的情况下,可认为轮胎的侧偏模型是线性的^[6].有些情况下,小转角并不能满足实际需要,因此需采用文献^[7]提出的轮胎侧偏特性一般理论模型.

轮胎的侧向变形如图1所示,其中 u 为 P 点的相坐标, μ 为定摩擦系数, F_z 、 $\eta(u)$ 为垂直载荷及其分布函数, $\xi(u)$ 胎体变形函数.轮胎物理参数: k_{cd} 为胎体侧向弯曲刚度, k_d 为胎面分布刚度, a 为印迹半长度.

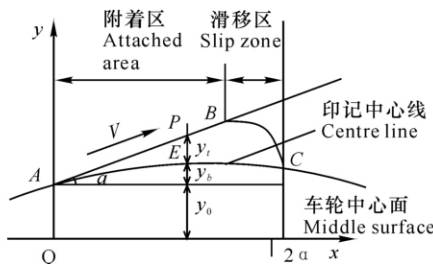


图1 轮胎侧向变形

Fig. 1 The tire lateral deformation

若轮胎弯曲特征比定义为

$$\varepsilon_b = 2 \cdot a \cdot \frac{k_d}{k_{cd}},$$

胎面侧偏刚度定义为

$$k_{ta} = 2 \cdot a^2 \cdot k_d,$$

无量纲侧偏率定义为

$$\varphi_y = \frac{k_{ta} \cdot \tan \delta}{\mu \cdot F_z},$$

则侧向力为

$$F_y = \frac{F_z \cdot \mu \cdot \int_{u_c}^2 \eta(u) du + \tan \delta \cdot k_d \cdot a^2 \cdot k_{cd}^2}{2 + \varepsilon_b \cdot \int_0^{u_c} \xi(u) du}.$$

在侧偏角为 δ 的情况下,回正力矩为

$$T_z = 0.5 \cdot a \cdot F_y \cdot (\mu \cdot \int_{u_c}^2 \eta(u) \cdot u du - 2 - \varepsilon_b \cdot \int_0^{u_c} \xi(u) \cdot u du) + \frac{a \cdot u_c^3 \phi_y (1 + \varepsilon_b)}{6}.$$

1.3 电动机模型

在EPS系统中采用直流电机,忽略其电感,则电动机端电压 U 与电枢电阻 R 和电流 I 的电压平衡方程^[8]为

$$U = RI + K_e \frac{d\theta_m}{dt}.$$

电动机的电流和电动机电磁力矩存在以下的关系:

$$T_m = K_a I,$$

式中: K_e 、 K_a 分别为电动机的反电动势系数、电磁转矩系数.

1.4 EPS系统模型

电动助力转向系统主要的元件有:传感器、电动机、电子控制单元、减速机构等^[9],其结构如图2.为简化计算过程,可将前轮及转向机构向转向柱简化,得到转向盘、转向柱、电动机动力学模型如下:

$$J_h \frac{d^2 \theta_h}{dt^2} + B_h \frac{d\theta_h}{dt} = T_h - K_s (\theta_h - \theta_c),$$

$$J_c \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} + B_c \frac{d\theta_c}{dt} = K_s (\theta_h - \theta_c) + T_a - \frac{T_z}{G_b},$$

$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = T_m - T_a,$$

式中: θ_h 、 θ_c 、 θ_m 分别为转向盘、转向柱、电动机的转角; J_h 、 J_c 、 J_m 分别为转向盘转动惯量、前轮及转向机构向转向柱等效后的转动惯量、电动机的转动惯量; B_h 、 B_c 、 B_m 分别为转向盘的阻尼、前轮及转向机构向转向柱等效后的阻尼、电动机的阻尼; T_h 、 T_a 、 T_m 分别为方向盘力矩、电动机作用到转向柱的助力力矩、电动机电磁力矩; K_s 为转矩传感器的刚度; G_a 、 G_b 分别为电动机到转向柱的传动比、转向柱到前轮的传动比.

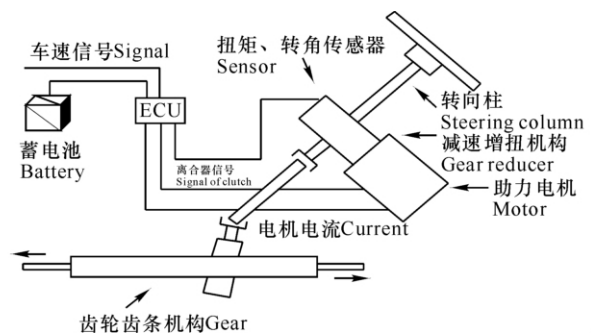


图2 EPS系统结构

Fig. 2 The system structure of EPS

2 EPS 系统动力学模型稳定性分析

令 $\theta'_m = \theta_{1m}, x = (\beta, \omega, \theta_h, \theta_{1h}, \theta_c, \theta_{1c}, \theta_{1m})$ 为 EPS 系统的状态向量. 综合上述各模型, 可以得到 EPS 系统的微分方程组:

$$\begin{cases} A_{11}\beta' + A_{12}\beta + A_{13}\omega + A_{14}\theta_c = 0, \\ A_{21}\omega' + A_{22}\omega + A_{23}\beta + A_{24}\theta_c = 0, \\ A_{31}\theta'_h + A_{32}\theta'_h + A_{33}\theta_h + A_{34}\theta_c + A_{35} = 0, \\ A_{41}\theta'_c + A_{42}\theta'_c + A_{43}\theta_c + A_{44}\theta_h + A_{45} = 0, \\ A_{51}\theta'_m + A_{52}\theta'_m + A_{53} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $A_{11} = mv, A_{12} = K_f + K_r, A_{13} = mv + \frac{L_1 K_f - L_2 K_r}{v}, A_{14} = -\frac{K_f}{G_b}, A_{21} = I_z, A_{22} = \frac{L_1^2 K_f + L_2^2 K_r}{v}, A_{23} = L_1 K_f - L_2 K_r, A_{24} = -\frac{L_1 K_f}{G_b}, A_{31} = J_h, A_{32} = B_h, A_{33} = A_{43} = K_s, A_{34} = A_{44} = -K_s, A_{35} = -T_h, A_{41} = J_c, A_{42} = B_c, A_{45} = \frac{T_z}{G_b} - T_a A_{51} = J_m, A_{52} = B_m, A_{53} = -T_m + T_a.$

当 $v \neq 0$ 时, 令 $T_h = 0, U = 0$, 可以得到奇次微分方程组式(2.2), 还可以得到(2.2)式的一个平衡点 $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} \beta' = -\frac{A_{12}}{A_{11}}\beta - \frac{A_{13}}{A_{11}}\omega - \frac{A_{14}}{A_{11}}\theta_c, \\ \omega' = -\frac{A_{22}}{A_{21}}\omega - \frac{A_{23}}{A_{21}}\beta - \frac{A_{24}}{A_{21}}\theta_c, \\ \theta'_h = \theta_{1h}, \\ \theta'_{1h} = -\frac{A_{32}}{A_{31}}\theta_{1h} - \frac{A_{33}}{A_{31}}\theta_h - \frac{A_{34}}{A_{31}}\theta_c, \\ \theta'_c = \theta_{1c}, \\ \theta'_{1c} = -\frac{A_{42}}{A_{41}}\theta_{1c} - \frac{A_{43}}{A_{41}}\theta_c - \frac{A_{44}}{A_{41}}\theta_h, \\ \theta'_{1m} = -\frac{A_{52}}{A_{51}}\theta_{1m}. \end{cases} \quad (2.2)$$

判定方程组(2.2)零解的稳定性, 可构造 Lyapunov 函数式:

$$V(x) = \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\theta_h^2 + \frac{1}{2}\theta_{1h}^2 + \frac{1}{2}\theta_c^2 + \frac{1}{2}\theta_{1c}^2 + \frac{1}{2}\theta_{1m}^2. \quad (2.3)$$

显然, $V(x)$ 是正定函数. $V(x)$ 沿着系统轨线(2.2)的全导数记为

$$V'(x) = xBx^T, \quad (2.4)$$

其中 $B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{71} & \cdots & B_{77} \end{bmatrix}, B_{11} = -\frac{A_{12}}{A_{11}}, B_{22} = -$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{22}}{A_{21}}, B_{33} = 0, B_{44} = -\frac{A_{32}}{A_{31}}, B_{55} = 0, B_{66} = -\frac{A_{42}}{A_{41}}, B_{77} = \\ & -\frac{A_{52}}{A_{51}}, B_{12} = B_{21} = -\left(\frac{A_{13}}{2A_{11}} + \frac{A_{23}}{2A_{22}}\right), B_{13} = B_{31} = 0, \\ & B_{14} = B_{41} = 0, B_{15} = B_{51} = -\frac{A_{14}}{A_{11}}, B_{16} = B_{61} = 0, B_{17} \\ & = B_{71} = 0, B_{23} = B_{32} = 0, B_{24} = B_{42} = 0, B_{25} = B_{52} \\ & = -\frac{A_{24}}{2A_{21}}, B_{26} = B_{62} = 0, B_{27} = B_{72} = 0, B_{34} = B_{43} = \\ & \frac{1}{2} - \frac{A_{33}}{2A_{31}}, B_{35} = B_{53} = 0, B_{36} = B_{63} = -\frac{A_{44}}{2A_{41}}, B_{37} = \\ & B_{73} = 0, B_{45} = B_{54} = -\frac{A_{34}}{2A_{31}}, B_{46} = B_{64} = 0, B_{47} = B_{74} \\ & = 0, B_{56} = B_{65} = \frac{1}{2} - \frac{A_{42}}{2A_{41}}, B_{57} = B_{75} = 0, B_{67} = B_{76} \\ & = 0. \end{aligned}$$

令 $S_i (i = 1, \dots, 7)$ 为矩阵 B 的顺序主子式, 当系统(2.2)稳定时, $V'(x)$ 是半负定的, 即 B 所有奇数级主子式全小于或等于零, 偶数级主子式全大于或等于零^[10]. 经计算可以得到模型参数的如下关系:

$$(1) S_1 = -\frac{A_{12}}{A_{11}} = -\frac{k_f + k_r}{mv}, \text{ 显然 } S_1 \text{ 恒小于零;}$$

$$(2) S_2 = \frac{A_{12} \cdot A_{22}}{A_{11} \cdot A_{21}} \cdot \left(\frac{A_{13}}{2A_{11}} + \frac{A_{23}}{2A_{21}}\right)^2 \geq 0, \text{ 系统稳}$$

定时, 满足条件 $2(L_1 k_f - L_2 k_r) \geq -(k_f + k_r)$, 且此时系统的分岔速度

$$v = \frac{2[m \cdot A_{12} \cdot (L_1^2 k_f + L_2^2 k_r)]^{1/2} - I_z^{1/2} \cdot (L_1 k_f + L_2 k_r)}{m \cdot I_z^{1/2} (1 + \frac{L_1 k_f + L_2 k_r}{A_{12}})}$$

$$(3) S_3 = 0;$$

(4) $S_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{A_{33}}{2A_{31}}\right)^2 \cdot S_2$, 由于(2)中满足 $S_2 \geq 0$, 所以 $S_4 \geq 0$;

$$(5) S_5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{A_{33}}{2A_{31}}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{A_{13}}{2A_{11}} + \frac{A_{23}}{2A_{21}}\right) \cdot \frac{A_{14}}{A_{11}} \cdot$$

$$\frac{A_{24}}{A_{21}} - \left(\frac{A_{14}}{2A_{11}}\right)^2 \cdot \frac{A_{22}}{A_{21}} - \frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \left(\frac{A_{24}}{2A_{21}}\right)^2\right] \leq 0,$$

有两种情况: ① 若 $\frac{1}{2} - \frac{A_{33}}{2A_{31}} = 0$, 满足系统(2.

2) 零解稳定, 此时 $K_s = J_h$; ② $\frac{1}{2} - \frac{A_{33}}{2A_{31}} \neq 0$,

系统(2.2)零解稳定时有 $\left(\frac{A_{13}}{2A_{11}} + \frac{A_{23}}{2A_{21}}\right) \cdot \frac{A_{14}}{A_{11}} \cdot$

$$\frac{A_{24}}{A_{21}} - \left(\frac{A_{14}}{2A_{11}}\right)^2 \cdot \frac{A_{22}}{A_{21}} - \frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \left(\frac{A_{24}}{2A_{21}}\right)^2 \leq 0;$$

(6) 由于 $S_7 = -\frac{A_{52}}{A_{51}} S_6$, 当系统(2.2)零解稳定时, 应满足 $S_6 \geq 0, S_7 \leq 0$, 故 $S_6 = S_7 = 0$. 此时有

$$(S_{61}^2 - 2 \cdot S_{61} \cdot S_{62} \cdot S_{63} - S_{62}^2 \cdot S_{63}^2) \cdot S_2 - \left(\frac{A_{14}}{2A_{11}}\right)^2 \cdot \frac{A_{22}}{A_{21}} \cdot [S_{64} + S_{62} \cdot \frac{A_{42}}{2A_{41}}] + \left[\left(\frac{A_{24}}{2A_{21}}\right)^2 \cdot \frac{A_{12}}{A_{11}} - \frac{A_{24} \cdot A_{14}}{2A_{21} \cdot A_{11}} \cdot \left(\frac{A_{13}}{2A_{11}} + \frac{A_{23}}{2A_{21}}\right)\right] \cdot [S_{64} - S_{63} \cdot \frac{A_{42}}{2A_{41}}] = 0,$$

其中, $S_{61} = \frac{A_{44}}{2A_{41}} \cdot \frac{A_{34}}{2A_{31}}, S_{62} = \frac{1}{2} - \frac{A_{43}}{2A_{41}}, S_{63} = \frac{1}{2} - \frac{A_{33}}{2A_{31}}, S_{64} = \left(\frac{A_{44}}{2A_{41}}\right)^2 \cdot \frac{A_{32}}{A_{31}}.$

以上是基于 Lyapunov 函数分析系统零点稳定情况下,模型参数应该满足的条件.由上面的(3)知,在 $K_s = J_h$ 或 $\left(\frac{A_{13}}{2A_{11}} + \frac{A_{23}}{2A_{21}}\right) \cdot \frac{A_{14}}{A_{11}} \cdot \frac{A_{24}}{A_{21}} - \left(\frac{A_{14}}{2A_{11}}\right)^2 \cdot \frac{A_{22}}{A_{21}} - \frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \left(\frac{A_{24}}{2A_{21}}\right)^2 \leq 0$ 的情况下,都能够保证系统零点的稳定性.但实际情况是,转矩传感器的刚度要比转向盘的转动惯量大,即 $K_s \neq J_h$,所以在汽车 EPS 系统设计过程中除了理论分析,还应考虑汽车各部件的实际特性.

在系统的结构参数确定的情况下,可以计算系统的临界失稳定速度.选取汽车的模型参数如下:

$$B_h = 0.0261 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}, B_c = 0.3 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}, B_m = 0.02 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}, J_h = 0.0298 \text{kg} \cdot \text{m}^2, J_c = 0.0044 \text{kg} \cdot \text{m}^2, J_m = 0.00005 \text{kg} \cdot \text{m}^2, K_s = 115 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}, G_a = 30, G_b = 15, K_e = 0.02 \text{V} \cdot \text{s}, K_a = 0.02 \text{N} \cdot \text{m}/\text{A}, R = 0.15 \Omega, L_1 = 1.0 \text{m}, L_2 = 1.8 \text{m}, v_{\max} = 33.14 \text{m}/\text{s}, K_f = K_r = 140000 \text{N}/\text{rad}, d = 0.008 \text{m}, v = 30 \text{m}/\text{s}, m = 2000 \text{kg}, I_z = 3000 \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

结合上述 EPS 系统零点稳定性分析结果和系统结构参数,计算得到上述 EPS 系统的临界失稳定速度为 $v_{\max} = 33.14 \text{m}/\text{s}$.分析可知,当增大转向盘的阻尼系数时可以提高系统的临界失稳定速度,综合考虑整车系统,可以选择适当的转向盘阻尼系数匹配整车性能.

3 结束语

本文结合转向柱助力式转向系统和轮胎的侧偏特性,建立任意转角情况下的汽车电动助力转向系统动力学模型,并通过构造 Lyapunov 函数,对该系统的零点稳定做了理论分析,得知模型参数满足一定的关系时,该系统是零点稳定的.同时我们还给出系统的临界失稳定速度.由分析结果可知,在 EPS 系统实际的开发和设计过程中,务必要将理论分析与实际转向部件特性相结合,才能开发出符合实际需求的系统.

参考文献:

- [1] 刘照,杨家军,廖道训.基于混合灵敏度方法的电动助力转向系统控制[J].中国机械工程,2003,14(10):874-876.
- [2] 李强,何仁.非线性闭环汽车电动助力转向系统稳定性分析[J].森林工程,2008,24(1):37-40.
- [3] 段广仁.线性系统理论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2002.
- [4] 卢娟.电动助力转向系统建模与仿真研究[D].重庆:重庆大学车辆工程,2006.
- [5] 许洪国.汽车理论[M].北京:人民交通出版社,2008.
- [6] Pacejka H B, Bakker E. The magic formula tire mode [J]. Vehicle System Dynamics, 1992(21):1-8.
- [7] 郭孔辉.轮胎侧偏特性的一般理论模型[J].汽车工程,1990,3:1-12.
- [8] 李伟,刘晓.汽车电动助力转向系统特性研究[J].客车技术与研究,2005,4:1-5.
- [9] 吕振,杨新华.基于改进模糊 PID 控制的 EPS 系统建模仿真[J].计算机仿真,2009(9):232-234,255.
- [10] 马知恩,周义仓.常微分方程稳定性与稳定性方法[M].北京:科学出版社,2001.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 94 页 Continue from page 94)

- [3] 李灿,郭尊光.带 p -Laplace 算子脉冲方程三点边值问题三个正解的存在性[J].太原师范学院学报,2012,11(1):57-60.
- [4] 于长田,刘衍胜.带脉冲的 p -Laplace 算子的多点边值问题[J].山东科学,2010,23(5):71-74.
- [5] Zhang X M, Ge W G. Impulsive boundary value problems involving the one-dimensional p -Laplacian[J]. Nonlinear Analysis, 2009,70(4):1692-1701.
- [6] 吴丽娇,王全义.具有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题的正解[J].华侨大学学报:自然科学版,2012,3:342-347.
- [7] 郭大钧,孙经先,刘兆理.非线性常微分方程泛函方法[M].济南:山东科学技术出版社,2005.

(责任编辑:尹 闯)