DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.02.016

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(2):91～94,98

# 三阶 $p$-Laplace 脉冲多点边值问题正解的存在性*

# Positive Solution of Multi-point Boundary Value Problem for Nonlinear Third Order Impulsive Differential Equation

蒋芳芳,韦煜明

JIANG Fang-fang,WEI Yu-ming

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)

(School of Mathematical Science,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

**摘要**:利用锥上的不动点定理,给出一类三阶带 $p$-Laplace 算子脉冲多点边值问题存在正解的条件.

**关键词**:脉冲方程 不动点定理 多点边值 锥

**中图法分类号**:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2013)02-0091-04

**Abstract**:By using the fixed-point index theorem on a cone,the existence of positive solution for a third order impulsive differential equation with p-Laplace and multi-point boundary problem is considered. Some sufficient conditions for that problem are obtained.

**Key words**:impulsive equation,the fixed point theorem,multi-point boundary problem,cone

$p$-Laplace 型算子的边值问题是近年来的研究热点. 这类问题产生于非牛顿流体理论和多孔介质中的湍流理论. 1982 年 M. A. Herreo 和 J. L. Vazquez 证明方程 $(\phi_p(u'))' = q(t)f(t,u(t),u'(t)), p > 1, 0 < t < 1$,其中 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 0$,的边值条件为 $u(0) = a, u(1) = b$ 或 $u'(0) = a, u(1) = b$. 之后,又有许多的科学家对该种问题进行了研究. 脉冲微分方程理论[1,2] 描述的是方程解的状态在某一点或多点突然变化的过程,是生活中常见的现象. $p$-Laplace 算子在加上脉冲条件后,能更好地描述的实际问题. 关于 $p$-Laplace 脉冲单点边值问题的研究[3,4] 已有一些报道,但是关于多点边值问题的研究报道不多. 文献[5]运用不动点定理讨论一类二阶带 $p$-Laplace 的脉冲微分方程多点边值问题:

$$\begin{cases} -(\phi_p(u'(t)))' = f(t,u(t)), t \in (0,1), \\ \Delta u\,|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)), k = 1,2,3,\cdots,n, \\ u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

解的存在性及多解性.

文献[6]研究一类具有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题

$$\begin{cases} -x'(t) + a(t,x(t))x(t) = f(t,x(t)), \\ \quad t \neq t_k, t \in (0,\omega), \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), \\ \quad k = 1,2,3,\cdots,p, \\ x(\omega) = x(0) \end{cases} \quad (2)$$

正解的存在性,并运用锥上的不动点定理给出该问题正解存在的一些充分条件.

本文结合文献[5,6]中的方法,研究一类三阶的脉冲多点边值问题

$$\begin{cases} -(\phi_p(u''(t)))' = f(t,u(t),u'(t)), t \neq t_k, \\ \quad t \in (0,1) \\ \Delta u\,|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)), k = 1,2,3,\cdots,n, \\ \Delta u'\,|_{t=t_k} = I_k^*(u(t_k)), k = 1,2,3,\cdots,n, \\ \Delta u''\,|_{t=t_k} = 0, k = 1,2,3,\cdots,n, \\ u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), u'(0) = 0, u''(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中,$u(0) > 0$;$\phi_p(s)$ 是一个 $p$-Laplace 算子,例如 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1, (\phi_p)^{-1} = \phi_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;$t_k$ 是固定的($k = 1,2,\cdots,n$,$n$ 是一个正整数),并且有 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots < t_n < 1$;$\xi_i \in (0,1), i = 1,2,\cdots,m-2$,有 $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{m-2} < 1$,且 $\xi_i \neq$

收稿日期:2012-11-07

修回日期:2013-03-11

作者简介:蒋芳芳(1988-),女,硕士研究生,主要从事微分方程研究。

*广西教育厅科研项目(201012MS025);广西壮族自治区研究生教育创新计划项目(2011106020701M37)资助。

$t_k, i=1,2,\cdots,m-2, k=1,2,\cdots,n; \Delta u|_{t=t_k}$ 和 $\Delta u'|_{t=t_k}$ 表示$u(t)$在$t=t_k$时的脉冲. $\Delta u(t_k)=u(t_k^+)-u(t_k^-)$, $\Delta u'(t_k)=u'(t_k^+)-u'(t_k^-)$, $u(t_k^-)$和$u(t_k^+)$分别代表$u(t)$在$t=t_k$时的左右极限,同样的$u'(t_k^-)$和$u'(t_k^+)$分别代表$u'(t)$在$t=t_k$时的左右极限. 该问题可以应用于弹性力学、血浆问题和天体物理等.

我们假设$a_i, f, I_k$和$I_k^*$满足条件:

(H1)$a_i\in[0,+\infty)$且满足$0<\sum_{i=1}^{m-2}a_i<1$;

(H2)$f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times R,[0,+\infty)$;

(H3)$I_k\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$, $I_k^*\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$.

## 1 预备知识

**定义1**[7] 设$X$是一个Banach空间,$K$是$X$中的一个非空子集,且满足:(1)对任意的$x,y\in K$,实数$\alpha,\beta\geqslant 0$,有$\alpha x+\beta y\in K$;(2)若$x,-x\in K$,则$x=0$. 那么,称$K$为$X$中的一个锥.

**引理1**[7] 设$X$是一个Banach空间,$K$是$X$中的一个锥,$\Omega_1$和$\Omega_2$是$X$中的两个开集,并且$\theta\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $T:K\cap(\overline{\Omega}_2/\Omega_1)\to K$是全连续算子,若下列条件之一成立,

1) 若$x\in K\cap\partial\Omega_1$,则$\|Tx\|\leqslant\|x\|$;若$x\in K\cap\partial\Omega_2$,则$\|Tx\|\geqslant\|x\|$;

2) 若$x\in K\cap\partial\Omega_1$,则$\|Tx\|\geqslant\|x\|$;若$x\in K\cap\partial\Omega_2$,则$\|Tx\|\leqslant\|x\|$,

则算子$T$在$K\cap(\overline{\Omega}_2/\Omega_1)$中有不动点.

令$J=[0,1]$, $J'=[0,1]/\{t_1,\cdots,t_p\}$, $X=PC([0,1],R)=\{x:[0,1]\to R\mid u(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i)$, $u'(0)=0, u''(1)=0$,且$x(t)$对于$t\in J'$是连续的,又当$t=t_k$时$x(t)$是左连续的且$x(t_k^+)$存在,$k=1,2,\cdots,p\}$. $X'=PC^1([0,1],R)=\{x:[0,1]\to R\mid u(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i)$, $u'(0)=0, u''(1)=0$,且$x(t)$对于$t\in J'$是连续的,又当$t=t_k$时$x(t)$,$x'(t)$是左连续的且$x(t_k^+)$, $x'(t_k^+)$存在,$k=1,2,\cdots,p\}$. 对$\forall x\in X\cap X'$,取范数$\|x\|=\max_{t\in[0,1]}\{|x(t)|\}$,则$X$在此范数下是一个Banach空间.

## 2 主要结果

**引理2** 假设条件$(H_1)\sim(H_3)$成立. 那么$u\in PC^1[0,1]\cap C^2(J')$是问题(3)的一个解,当且仅当$u\in PC^1[0,1]$是如下脉冲积分方程的一个解:

$$u(t)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))dr)ds+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k))\}+\int_0^t(t-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))dr)ds+\sum_{0<t_k<t}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<t}(t-t_k)I_k^*(u(t_k)). \tag{4}$$

**证明** 首先证明$u\in PC^1[0,1]$是微分方程组(3)的一个解. 容易得到积分:

$$\int_t^1-\phi_p(u''(s))'ds=-\phi_p(u''(1))+\phi_p(u''(t))=\int_t^1 f(s,u(s),u'(s))ds.$$

由$u''(1)=0$以及$\phi_p$的性质可以得到:

$$u''(t)=\phi_q(\int_t^1 f(s,u(s),u'(s))ds). \tag{5}$$

如果$t_1<t<t_2$,那么由(5)式从0到$t_1$积分知

$$u'(t_1)-u'(0)=\int_0^{t_1}\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))dr)ds. \tag{6}$$

再对(5)式从$t_1$到$t$进行积分得到

$$u'(t)-u'(t_1^+)=\int_{t_1}^t\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))dr)ds, \tag{7}$$

将(6)式与(7)式相加,又由$u'(0)=0$可以得到

$$u'(t)=I_1^*(u(t_1))+\int_0^t\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))dr)ds, t\in(t_1,t_2). \tag{8}$$

重复上述过程,还可以得到

$$u'(t)=\sum_{0<t_k<t}I_k^*(u(t_k))+\int_0^t\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))dr)ds. \tag{9}$$

易知(9)式对所有的$t\in J$成立. 为了构造含$u'(t)$的$u(t)$的表达式,在$t\in[0,t_1]$上对$u(t)$积分得$\int_0^{t_1}u'(s)ds=\int_0^{t_1}u'(s)ds$,于是有$u(t_1)-u(0)=\int_0^{t_1}u'(s)ds$. 由类似的步骤还可以得到

$$u(t)=u(0)+\int_0^t u'(s)ds+\sum_{0<t_k<t}I_k(u(t_k)). \tag{10}$$

把(9)式代入(10)式可以得到$u(t)$的表达式(可参考文献[7]第387页证明过程)

$$u(t)=u(0)+\int_0^t(t-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))dr)ds+\sum_{0<t_k<t}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<t}(t-$$

$t_k)I_k^*(u(t_k))$.

取 $t=\xi_i$，可以得到

$$u(\xi_i)=u(0)+\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k)).$$

两边同时乘上 $a_i$，再将 $i$ 从 1 到 $m-2$ 进行叠加，得到：

$$\sum_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iu(0)+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k)).$$

又由边界条件中 $u(0)$ 的取值，整理得到

$$u(0)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k))\}. \tag{11}$$

把 $u(0)$ 代入 $u(t)$ 得

$$u(t)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k))\}+\int_0^t(t-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<t}(t-t_k)I_k^*(u(t_k)).$$

如果 $u\in PC^1[0,1]\cap C^2(J')$ 是(4)式的一个解，则对(4)式进行微分

$$u'(t)=\sum_{0<t_k<t}I_k^*(u(t_k))+\int_0^t\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s, \tag{12}$$

$$u''(t)=\phi_q(\int_t^1 f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s). \tag{13}$$

这表示

$$-(\phi_p(u''(t)))'=f(t,u(t),u'(t)),$$

$$\Delta u|_{t=t_k}=I_k(u(t_k)),\Delta u'|_{t=t_k}=I_k^*(u(t_k)),\Delta u''|_{t=t_k}=0,k=1,2,3,\cdots,n,$$

$$u(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i),u'(0)=0,u''(1)=0.$$

最后，我们得到 $u''(t)>0,u'(t)>0$. 定义 $U=PC^1[0,1]\cap C^2(J')$，$K=\{x\in U:x(t)\geqslant\delta\|x\|,t\in[0,1]\}$，$K_\rho=\{u\in K:\|u\|<\rho,\rho>0\}$，其中 $0<\delta<1$. 易见 $K$ 是 $X$ 中的一个锥.

定义算子 $T:K\to R^+$ 为

$$T(u(t))=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k))\}+\int_0^t(t-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<t}(t-t_k)I_k^*(u(t_k)).$$

**引理 3** 假设条件(H1)～(H3)成立，并且还满足以下条件：

$(\mathrm{H}_4)\max\{\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u(t),u'(t))}{\phi_p(\rho)}:u\in[0,\rho]\}<\phi_p(l)$，$\max\{I_k(u(t)),I_k^*(u(t)):u\in[0,\rho]\}<l_p$，其中 $l=\dfrac{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}{\frac{1}{q+1}+n+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)}$. 则 $T$ 是一个全连续算子.

**证明** 由 $T$ 的定义可知 $T$ 是连续算子，所以只需证明 $T$ 是紧算子. 一方面，由于

$$|T(u(t))|=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\cdot\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k))\}+\int_0^t(t-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<t}(t-t_k)I_k^*(u(t_k))\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k))\}+\int_0^1(1-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<1}I_k(u(t_k))+$$

$$\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)I_k^*(u(t_k))\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\int_0^1(1-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<1}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)I_k^*(u(t_k))\}\leqslant\frac{l\rho}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}(\frac{1}{q+1}+n+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k))=\rho. \quad (14)$$

**所以**,$T$ **在** $K_\rho$ **上一致有界. 另一方面,定义** $J_k=[t_{k-1},t_k]$. **易知,在每个** $J_k$ **上** $T$ **等度连续,由** Arzela-Ascoli **定理可知** $T$ **是紧算子,所以** $T$ **是全连续算子.**

**引理 4** $u\in PC^1[0,1]\cap C^2(J')$ **是边值问题**(3) **的解当且仅当** $u$ **是算子** $T$ **的不动点.**

**证明** **由引理** 2 **的结论可知引理** 4 **成立.**

**定义** $\Omega_1=\{x\in X'\cap C^2(J'):\|x\|<r\}$,$\Omega_2=\{x\in X'\cap C^2(J'):\|x\|<\frac{R}{\delta}\}$,**其中** $0<r/\delta<R$.

**做如下假设**:$b_2(t)\phi_p(u(t))\leqslant\int_t^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r\leqslant b_1(t)\phi_p(u(t))$,$C_2u(t)\leqslant I_k^*(u(t))\leqslant C_1u(t)$,$D_2u(t)\leqslant I_k(u(t))\leqslant D_1u(t)$.

**定理** **若条件**(H1) ~ (H4) **成立,且**

(H5) $$\frac{\delta\sum_{i=1}^{m-2}a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(b_2(s))\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)C_2+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}D_2\}\geqslant 1,$$

(H6) $$\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\int_0^1(1-s)\phi_q(b_1(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)C_1+\sum_{0<t_k<1}D_1\}\leqslant 1$$

**成立,则边值问题**(3) **至少存在一个正解.**

**证明** **对** $Tu$ **关于** $t$ **求导,得到:**

$$(Tu)'(t)=\sum_{0<t_k<t}I_k^*(u(t_k))+\int_0^t\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s. \quad (15)$$

**易知**$(Tu)'\geqslant 0$,**所以** $\|Tu(t)\|=|Tu(1)|$.

**则对** $\forall u\in\partial\Omega_1\cap K$,$0\leqslant u(t)\leqslant\|u\|=r$,$u(t)\geqslant\delta\|u\|$,**可知**

$$\|T(u(t))\|=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}I_k(u(t_k))+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)I_k^*(u(t_k))\}+\int_0^1(1-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<1}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)I_k^*(u(t_k))\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(b_2(s))u(s)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}D_2u(t_k)+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)C_2u(t_k)\}\geqslant$$

$$\frac{\delta\sum_{i=1}^{m-2}a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)\phi_q(b_2(s))\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}D_2+\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{0<t_k<\xi_i}(\xi_i-t_k)C_2\}\|u\|\geqslant\|u\|.$$

**即对** $\forall u\in\partial\Omega_1\cap K$,**有** $\|Tu(t)\|\geqslant\|u\|$. **而对** $\forall u\in\partial\Omega_2\cap K$,**有** $R=\|u\|\geqslant u(t)\geqslant\delta\|u\|$,**再由**(14) **式的证明可知**

$$\|T(u(t))\|\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\int_0^1(1-s)\phi_q(\int_s^1 f(r,u(r),u'(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<1}I_k(u(t_k))+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)I_k^*(u(t_k))\}\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\int_0^1(1-s)\phi_q(b_1(s))u(s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)C_1u(t_k)+\sum_{0<t_k<1}D_1u(t_k)\}\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\{\int_0^1(1-s)\phi_q(b_1(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<1}(1-t_k)C_1+\sum_{0<t_k<1}D_1\}\|u\|\leqslant\|u\|.$$

**由引理**1**知,算子** $T$ **在** $K\cap(\overline{\Omega}_2/\Omega_1)$ **中至少有一个不动点. 而由引理** 4 **知,边值问题**(3)**至少存在一个不动点.**

**参考文献:**


[1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[2] Bainov D D, Simeonov P S. Systems with impulse effect [M]. Ellis Horwood: Chichister, 1989.


(下转第 98 页 Continue on page 98)

$$(S_{61}^2-2\cdot S_{61}\cdot S_{62}\cdot S_{63}-S_{62}^2\cdot S_{63}^2)\cdot S_2-(\frac{A_{14}}{2A_{11}})^2\cdot\frac{A_{22}}{A_{21}}\cdot[S_{64}+S_{62}\cdot\frac{A_{42}}{2A_{41}}]+[(\frac{A_{24}}{2A_{21}})^2\cdot\frac{A_{12}}{A_{11}}-\frac{A_{24}\cdot A_{14}}{2A_{21}\cdot A_{11}}\cdot(\frac{A_{13}}{2A_{11}}+\frac{A_{23}}{2A_{21}})]\cdot[S_{64}-S_{63}\cdot\frac{A_{42}}{2A_{41}}]=0,$$

其中，$S_{61}=\frac{A_{44}}{2A_{41}}\cdot\frac{A_{34}}{2A_{31}}$，$S_{62}=\frac{1}{2}-\frac{A_{43}}{2A_{41}}$，$S_{63}=\frac{1}{2}-\frac{A_{33}}{2A_{31}}$，$S_{64}=(\frac{A_{44}}{2A_{41}})^2\cdot\frac{A_{32}}{A_{31}}$.

以上是基于 Lyapnuon 函数分析系统零点稳定情况下，模型参数应该满足的条件. 由上面的(3) 知，在 $K_s=J_h$ 或 $(\frac{A_{13}}{2A_{11}}+\frac{A_{23}}{2A_{21}})\cdot\frac{A_{14}}{A_{11}}\cdot\frac{A_{24}}{A_{21}}-(\frac{A_{14}}{2A_{11}})^2\cdot\frac{A_{22}}{A_{21}}-\frac{A_{12}}{A_{11}}\cdot(\frac{A_{24}}{2A_{21}})^2\leqslant 0$ 的情况下，都能够保证系统零点的稳定性. 但实际情况是，转矩传感器的刚度要比转向盘的转动惯量大，即 $K_s\neq J_h$，所以在汽车 EPS 系统设计过程中除了理论分析，还应考虑汽车各部件的实际特性.

在系统的结构参数确定的情况下，可以计算系统的临界失稳定速度. 选取汽车的模型参数如下：

$B_h=0.0261\mathrm{N\cdot m\cdot s/rad}$，$B_c=0.3\mathrm{N\cdot m\cdot s/rad}$，$B_m=0.02\mathrm{N\cdot m\cdot s/rad}$，$J_h=0.0298\mathrm{kg\cdot m^2}$，$J_c=0.0044\mathrm{kg\cdot m^2}$，$J_m=0.00005\mathrm{kg\cdot m^2}$，$K_s=115\mathrm{N\cdot m\cdot s/rad}$，$G_a=30$，$G_b=15$，$K_e=0.02\mathrm{V\cdot s}$，$K_a=0.02\mathrm{N\cdot m/A}$，$R=0.15\Omega$，$L_1=1.0\mathrm{m}$，$L_2=1.8\mathrm{m}$，$v_{\max}=33.14\mathrm{m/s}$ $K_f=K_r=140000\mathrm{N/rad}$，$d=0.008\mathrm{m}$，$v=30\mathrm{m/s}$，$m=2000\mathrm{kg}$，$I_z=3000\mathrm{kg\cdot m^2}$.

结合上述 EPS 系统零点稳定性分析结果和系统结构参数，计算得到上述 EPS 系统的临界失稳定速度为 $v_{\max}=33.14\mathrm{m/s}$. 分析可知，当增大转向盘的阻尼系数时可以提高系统的临界失稳速度，综合考虑整车系统，可以选择适当的转向盘阻尼系数匹配整车性能.

## 3 结束语

本文结合转向柱助力式转向系统和轮胎的侧偏特性，建立任意转角情况下的汽车电动助力转向系统动力学模型，并通过构造 Lyapnuon 函数，对该系统的零点稳定做了理论分析，得知模型参数满足一定的关系时，该系统是零点稳定的. 同时我们还给出系统的临界失稳速度. 由分析结果可知，在 EPS 系统实际的开发和设计过程中，务必要将理论分析与实际转向部件特性相结合，才能开发出符合实际需求的系统.

参考文献：


[1] 刘照，杨家军，廖道训. 基于混合灵敏度方法的电动助力转向系统控制[J]. 中国机械工程，2003，14(10)：874-876.

[2] 李强，何仁. 非线性闭环汽车电动助力转向系统稳定性分析[J]. 森林工程，2008，24(1)：37-40.

[3] 段广仁. 线性系统理论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2002.

[4] 卢娟. 电动助力转向系统建模与仿真研究[D]：重庆：重庆大学车辆工程，2006.

[5] 许洪国. 汽车理论[M]. 北京：人民交通出版社，2008.

[6] Pacejka H B，Bakker E. The magic formula tire mode [J]. Vehicle System Synamics，1992(21)：1-8.

[7] 郭孔辉. 轮胎侧偏特性的一般理论模型[J]. 汽车工程，1990，3：1-12.

[8] 李伟，刘晓. 汽车电动助力转向系统特性研究[J]. 客车技术与研究，2005，4：1-5.

[9] 吕振，杨新华. 基于改进模糊 PID 控制的 EPS 系统建模仿真[J]. 计算机仿真，2009(9)：232-234，255.

[10] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2001.


（责任编辑：尹　闯）

（上接第 94 页 Continue from page 94）


[3] 李灿，郭尊光. 带 $p$-Laplace 算子脉冲方程三点边值问题三个正解的存在性[J]. 太原师范学院学报，2012，11(1)：57-60.

[4] 于长田，刘衍胜. 带脉冲的 $p$-Laplace 算子的多点边值问题[J]. 山东科学，2010，23(5)：71-74.

[5] Zhang X M，Ge W G. Impulsive boundary value problems involving the one-dimensional $p$-Laplcian[J]. Noliner Analysis，2009，70(4)：1692-1701.

[6] 吴丽娇，王全义. 具有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题的正解[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2012，3：342-347.

[7] 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 济南：山东科学技术出版社，2005.


（责任编辑：尹　闯）