DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.01.018

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(1):31～34

广义商高数的纯指数 Diophantine 方程 $a^x+b^y=c^z$ 的解

Solution of Pure Exponential Diophantine Equations $a^x+b^y=c^z$ for Generalized Pythagorean Triplets

陈进平

CHEN Jin-ping

(西华师范大学数学与信息学院,四川南充 637002)

(College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong, Sichuan, 637002, China)

摘要:运用 Gel'fond-Baker 方法证明,在 $m\geqslant 10^5r^3$ 时,丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ 仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,r)$. 其中 r 和 m 为正偶数,$(a,b,c)=(|V(m,r)|,|U(m,r)|,m^2+1)$, $V(m,r)+U(m,r)\sqrt{-1}=(m+\sqrt{-1})^r$.

关键词:丢番图方程　Terai 猜想　正整数解　Gel'fond-Baker 方法

中图法分类:O156.7　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2013)01-0031-04

Abstract: Using the Gel'fond-Baker method, we prove that if $m\geqslant 10^5r^3$, then the Diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ has only one positive integer solution $(x,y,z)=(2,2,r)$. Let r and m be a positive even integer, $(a,b,c)=(|V(m,r)|,|U(m,r)|,m^2+1)$, $V(m,r)+U(m,r)\sqrt{-1}=(m+\sqrt{-1})^r$.

Key words: Diophantine equation, Terai conjecture, positive interger solution, Gel'fond-Baker method

若 a,b,c 是两两互素的正整数,N 是自然数集合,那么方程

$$a^x+b^y=c^z, x,y,x\in N \tag{1}$$

表示一类基本而又重要的指数丢番图方程.

设 r 是大于 1 的正整数,m 为偶数,且

$$V(m,r)+U(m,r)\sqrt{-1}=(m+\sqrt{-1})^r. \tag{2}$$

那么 $U(m,r)$ 和 $V(m,r)$ 是满足

$$V^2(m,r)+U^2(m,r)=c^r, \gcd(U(m,r),V(m,r))=1 \tag{3}$$

的非零整数. 因此,由(3)式可知:如果 a,b,c 满足

$$a=|V(m,r)|, b=|U(m,r)|, c=m^2+1, \tag{4}$$

则必有

$$a^2+b^2=c^r, \gcd(a,b)=1, \tag{5}$$

所以满足(4)式的数组 (a,b,c) 被称为一类广义商高数.

1956 年,Jesmanowicz[1] 提出了著名的猜想:

猜想 1　当 a,b,c 取商高数时,即当 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$ 时,方程(1)仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$.

当 $r=2$ 时,即为著名的商高数组的 Jesmanowicz 猜想. 关于 Jesmanowicz 猜想已经有较多的结果[2,3]. 当 (a,b,c) 是广义商高数时,有以下猜想:

猜想 2　当 a,b,c 满足(4)式时,方程(1)仅有解 $(x,y,z)=(2,2,r)$ 适合 $\min(x,y,x)>1$.

目前有关猜想 2 的研究结果主要有 4 种情况:

(i) r 是很小的给定值. 文献[4～6]证明:当 $r\in\{3,4,5\}$ 时,猜想 2 成立.

(ii) b 或 c 是奇素数. 文献[7]证明:当 c 是奇素数,r 为奇数时,如果 $m>41r^{3/2}$,则猜想 2 成立.

(iii) b 是满足 $b\equiv 3 \pmod 4$ 的正奇数. 文献[10]证明:当 $r\equiv 1 \pmod 2$, $b\equiv 3 \pmod 4$ 时,如果 $m\equiv 2 \pmod 4$ 且 $m>r\sqrt{1.5\log_3(m^2+1)-1}$,则猜想 2 成立.

(iv) 2008 年,文献[8]综合运用多种方法证明一些一般性的结果:当 $r\equiv 5 \pmod 8$ 时,如果 $m>r^2$,

收稿日期:2012-08-27

作者简介:陈进平(1990-),男,主要从事数论和代数方向研究。

则猜想 2 成立. 2010 年，文献[9]运用 Gel'fond-Baker 方法证明：当 r 为奇数时，如果 $m > 10^6 r^6$，则猜想 2 成立.

对于 (a,b,c) 适合(4)式且 r 是偶数的情况. 当 $r \geqslant 6$ 时，尚未见有过报道. 本文也讨论 r 为偶数时方程(1)的解，运用 Gel'fond-Baker 方法证明：当 $m \geqslant 10^5 r^3$ 时，则方程(1)仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,r)$. 由此可知，对于任意给定的偶数 r，当 $m \geqslant 10^5 r^3$ 时，猜想 2 成立. 当 $r=2$，且 $m \geqslant 800000$ 时，猜想 1 成立.

1 主要引理

引理 1.1[10] 设 a_1, a_2 是满足 $\min(a_1,a_2) > 10^3$ 的正整数. 那么对于正整数 b_1, b_2，$\Lambda = b_1 \log a_1 - b_2 \log a_2$. 当 $\Lambda \neq 0$ 时，

$$\log|\Lambda| > -17.61(\log a_1)\cdot(\log a_2)(1.7735+B)^2,$$

其中

$$B=\max\left(8.445, 0.2257+\log\left(\frac{b_1}{\log a_2}+\frac{b_2}{\log a_1}\right)\right).$$

引理 1.2 如果 $2 \mid m$，r 为偶数，那么方程(1)的解 (x,y,z) 都满足

$$y < 208(\log a)(\log c)(\log B')^2,$$

其中

$$\log B' = \max\left(10, 0.04+\log\left(\frac{z}{\log a}+\frac{x}{\log c}\right)\right).$$

证明过程参考文献[9]中的引理 11.

引理 1.3 当 $\min(a,b,c) > 10^3$ 且 $b^{\frac{y}{2}} \geqslant a^x$ 或者 $a^{\frac{x}{2}} \geqslant b^y$ 时，对方程(1)必有

$$y < 4308\log c \text{ 或 } x < 4308\log c. \quad (6)$$

证明 若 $b^{\frac{y}{2}} \geqslant a^x$，则由方程(1)可得

$$z\log c = \log(a^x+b^y) = y\log b + \log\left(1+\frac{a^x}{b^y}\right) < y\log b + \frac{a^x}{b^y}. \quad (7)$$

设 $\Lambda = z\log c - y\log b$，则由(7)式可得 $\Lambda > 0$，而且

$$\log\Lambda < x\log a - y\log b \leqslant -\frac{1}{2}y\log b. \quad (8)$$

又因为 $\min(b,c) > 10^3$，故由引理 1.1 可知

$$\log|\Lambda| > -17.61(\log c)\cdot(\log b)(1.7735+B)^2, \quad (9)$$

其中

$$B=\max\left(8.445, 0.2257+\log\left(\frac{z}{\log b}+\frac{y}{\log c}\right)\right).$$

由(8)式和(9)式可得

$$\frac{y}{2}\log b < 17.61(\log c)(\log b)(1.7735+B)^2. \quad (10)$$

再由(10)式可得

$$\frac{y}{2\log c} < 17.61\left(1.7735+\max\left(8.445, 0.2257+\log\left(\frac{z}{\log b}+\frac{y}{\log c}\right)\right)\right)^2. \quad (11)$$

当 $B=8.445$ 时，因为 $c^z > b^y$，故由(11)式可得

$$\frac{2y}{\log c} < \frac{z}{\log b}+\frac{y}{\log c} \leqslant e^{8.2193} < 3712. \quad (12)$$

由此可知(6)式成立.

当 $B > 8.445$ 时，由(11)式可知 $B = 0.2257+\log\left(\frac{z}{\log b}+\frac{y}{\log c}\right)$. 将此式代入(11)式后得

$$35.22\left(1.9992+\log\left(\frac{z}{\log b}+\frac{y}{\log c}\right)\right)^2 > \frac{y}{\log c}. \quad (13)$$

因为 $\min(b,c) > 10^3$ 且 $b^{\frac{y}{2}} > a^x$，故又由(7)式可知

$$\frac{z}{\log b}+\frac{y}{\log c} < \frac{2y}{\log c}+1. \quad (14)$$

故再由(13)式和(14)式可得

$$35.22\left(1.9992+\log\left(\frac{2y}{\log c}+1\right)\right)^2 > \frac{y}{\log c}. \quad (15)$$

由此可知(6)式成立.

同理，当 $a^{\frac{x}{2}} \geqslant b^y$ 时(6)式也成立.

2 主要结果

定理 当 a,b,c 满足(4)式时，如果 r 为偶数，且 $m \geqslant 10^5 r^3$，则方程(1)仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,r)$.

证明 当 $m \geqslant 10^5 r^3$ 时，因为 $r \geqslant 2$，故有 $m \geqslant 8\cdot 10^5$. 现在设 (x,y,z) 是方程(1)的一组适合 $(x,y,z) \neq (2,2,r)$ 的解. 以下证明该解不存在.

如果 $y=1$，则由(4)式和(1)式可得 $(V(m,r))^x + U(m,r) = (m^2+1)^z$. 如果 $r \equiv 2 \pmod 4$ 时，对方程(1)两边取模 m 可得 $(-1)^x \equiv 1 \pmod m$，则 x 为偶数. 此时对两边取模 m^2 可得 $r \equiv 0 \pmod m$. 由于 $m \geqslant 10^5 r^3$，则上式明显不成立. 如果 $r \equiv 0 \pmod 4$ 时，则对两边取模 m^2 可得 $-r \equiv 0 \pmod m$. 由于 $m \geqslant 10^5 r^3$，上式也明显不成立.

如果 $y=2$. 当 $x=1$ 时，由(1)式和(5)式可知，$z<r$，$a-1 \equiv 0 \pmod{c^z}$. 由此可得 $a > a-1 \geqslant c^z$

$= b^2 + a > a$. 矛盾，故有 $x > 1$. 又因 $(x, y, z) \neq (2, 2, r)$ ，所以 $x > 2$. 再用同样的方法可以推出 $x \geqslant 5$.

当 $x \geqslant 5$ 时，由(4)式可得 $a^{\frac{x}{2}} > b^2$. 因为 $c^r > a^2$，再由(1)式可得

$$z < \frac{x\log a + \log(1 + \frac{b^2}{a^x})}{\log c} < \frac{x\log a + \log 2}{\log c} < (\frac{r}{2} + 1)x . \tag{16}$$

若 $r \equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 时，对方程(1)两边取模 m 可得 $(-1)^x \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$ ，则 x 为偶数. 所以当 r 为任意正偶数时，由(1)式两边取模 m^3 可得

$$-x(\frac{r}{2}) + r^2 \equiv z(\mathrm{mod}\ m). \tag{17}$$

由(16)式和(17)式可得

$$x > \frac{2m + 2r^2}{r^2 + 2} . \tag{18}$$

由(6)式，(18)式以及 r 为大于等于 2 偶数，$m \geqslant 10^5 r^3$ 等条件可得

$$m + 4 < 2154(\frac{m^{2/3}}{10^{10/3}} + 2)\log(m^2 + 1) . \tag{19}$$

由(19)式解得，$m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

如果 $y = 3$. 当 $x = 1$ 时，若 $r \equiv 2(\mathrm{mod}4)$ ，对方程(1)两边取模 m 可得 $(-1)^x \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$ ，则 x 为偶数. 因此仅有 $r \equiv 0(\mathrm{mod}4)$ 这种情况.

如果 $a > b^3$. 又因为 $c^r > a^2$，此时由(1)式可得

$$z < \frac{\log a + \log(1 + \frac{b^3}{a})}{\log c} < \frac{0.5r\log c + \log 2}{\log c} < 0.5r + 1 . \tag{20}$$

对(1)式两边取模 m^3 可得

$$-x(\frac{r}{2}) \equiv z(\mathrm{mod}\ m). \tag{21}$$

由(20)式和(21)式可得

$$1 + 0.5r^2 > m . \tag{22}$$

由(22)式和 $m \geqslant 10^5 r^3$ 可得

$$1 + \frac{0.5m^{2/3}}{10^{10/3}} > m . \tag{23}$$

由(23)式解得，$m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

如果 $a \leqslant b^3$. 因为 $c^r > b^2$ ，此时由(1)式可得

$$z < \frac{3\log b + \log(1 + \frac{a}{b^3})}{\log c} < \frac{1.5r\log c + \log 2}{\log c} < 1.5r + 1 . \tag{24}$$

由(1)式两边取模 m^3 可得

$$-(\frac{r}{2}) \equiv z(\mathrm{mod}\ m). \tag{25}$$

由(24)式和(25)式可得

$$1 + 0.5r^2 + r > m . \tag{26}$$

由(26)式和 $m \geqslant 10^5 r^3$ 可得

$$1 + \frac{0.5m^{2/3}}{10^{10/3}} + \frac{m^{1/3}}{10^{5/3}} > m . \tag{27}$$

由(27)式解得，$m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

同理对 $y = 3$ ，当 $2 \leqslant x \leqslant 12$ 时，解得当 $m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

又对 $y = 3$ ，当 $x \geqslant 13$ 时，则由(4)式可得 $a^{\frac{x}{2}} > b^3$. 因为 $c^r > a^2$，由(1)式可得

$$z < \frac{x\log a + \log(1 + \frac{b^3}{a^x})}{\log c} < \frac{x\log a + \log 2}{\log c} < (\frac{r}{2} + 1)x . \tag{28}$$

现已证明 $r \equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 时，x 为偶数. 因此当 r 为任意正偶数时，由(1)式两边取模 m^3 可得

$$-x(\frac{r}{2}) \equiv z(\mathrm{mod}\ m). \tag{29}$$

由(28)式和(29)式可得

$$x > \frac{2m}{r^2 + 2} . \tag{30}$$

由(6)式，(30)式以及 r 为大于等于 2 的偶数，$m \geqslant 10^5 r^3$ 等条件可得

$$m < 2154(\frac{m^{2/3}}{10^{10/3}} + 2)\log(m^2 + 1) . \tag{31}$$

由(31)式解得，$m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

如果 $y \geqslant 4$. 若当 $r \equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 时，对方程(1)两边取模 m，可得 $(-1)^x \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$，则 x 为偶数. 又当 r 为任意正偶数时，对方程(1)式两边取模 m^4 可得

$$-x(\frac{r}{2}) \equiv z(\mathrm{mod}\ m^2). \tag{32}$$

如果 $a^{\frac{x}{2}} > b^y$. 因为 $c^r > a^2$，则同理可得类似(28)式的结果. 由(28)式和(32)式可得

$$x > \frac{2m^2}{r^2 + 2} . \tag{33}$$

由(6)式和(33)式可得

$$\frac{2m^2}{r^2 + 2} < 4308\log(m^2 + 1) . \tag{34}$$

由(34)式和 $m \geqslant 10^5 r^3$ 可得

$$m^2 < 2154(\frac{m^{2/3}}{10^{10/3}} + 2)\log(m^2 + 1) . \tag{35}$$

由(35)式解得，$m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

如果 $a^{x/2} \leqslant b^y$ ，则由(1)式可得

$$c^z = a^x + b^y \leqslant b^{2y} + b^y < 2b^{2y} . \tag{36}$$

再由(36)式和 $c^r > b^2$ 可得

$$z < \frac{2y\log b + \log 2}{\log c} < (r+1)y . \quad (37)$$

而由(1)式和(4)式可得 $z > x$. 此时再由(32)和(37)式可得

$$y > \frac{2m^2}{r^3 + r + 2} . \quad (38)$$

由 $m \geqslant 10^5 r^3$ 和(38)式可得

$$y > 10^5 m . \quad (39)$$

因为 $m \geqslant 8 \cdot 10^5$. 经验算得 $\min(a,b,c) > 1000$. 则由方程(1)可得

$$z\log c = \log(a^x + b^y) = x\log a + \log(1 + \frac{b^y}{a^x})$$

$$< x\log a + \frac{b^y}{a^x} . \quad (40)$$

再设 $\Lambda = z\log c - x\log a$,则由(40)式可得 $\Lambda > 0$. 由于 $c^z > a^x$, 则

$$\frac{z}{\log a} + \frac{x}{\log c} < \frac{2z}{\log a} . \quad (41)$$

又因为 m 为偶数,由引理 1.2 和(41)式可得

$$y < 208(\log a)(\log c)(\max(10, 0.04 + \log(\frac{2z}{\log a})))^2 . \quad (42)$$

若 $\log \frac{2z}{\log a} \leqslant 9.96$, 由(1)式和(4)式可得 $z > x$. 由(32)式可得 $z > \frac{2m^2}{r^2 - r + 2}$. 此时再由 $c^r > a^2$ 和 $\log \frac{2z}{\log a} \leqslant 9.96$ 可得

$$\frac{8m^2}{r^2 - r + 2} < re^{9.96}\log(m^2 + 1) . \quad (43)$$

由(43)式和 $r \geqslant 2$ 可得

$$8m^2 < r^3 e^{9.96}\log(m^2 + 1) . \quad (44)$$

由(44)式和 $m \geqslant 10^5 r^3$ 可得

$$8m^2 < \frac{m}{10^5} e^{9.96}\log(m^2 + 1) . \quad (45)$$

由(45)式解得, $m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

若 $\log \frac{2z}{\log a} > 9.96$. 由(37)式和引理 1.3 得 $z < 4308(r+1)\log c$,此时由(42)式可得

$$y < 208(\log a)(\log c)(0.04 + \log(\frac{8616(r+1)\log c}{\log a}))^2 . \quad (46)$$

由(2)式和(4)式得 $a > c$. 再由(39)式和(46)式以及 $c^r > a^2$ 可得

$$10^5 m < 104\mathrm{r}(\log(m^2 + 1))^2(0.04 + \log(8616(r+1)))^2 . \quad (47)$$

由(47)式和 $m \geqslant 10^5 r^3$ 可得

$$10^{(5+5/3)}\mathrm{m}^{\frac{2}{3}} < 104(\log(8616(\frac{\mathrm{m}^{\frac{1}{3}}}{10^{5/3}} + 1)) + 0.04)^2(\log(m^2 + 1))^2 . \quad (48)$$

由(48)式解得, $m \geqslant 8 \cdot 10^5$ 时方程(1)无解.

定理证明完毕.

参考文献:

[1] Jesmanowicz L. Kilka uwag o liczbach pitagorejskich [J]. Wiadom Mat,1955/1956,1(2):196-202.

[2] Le M H. A note on Jesmanowicz conjecture[J]. Colloq Math,1995,69(1):47-51.

[3] 乐茂华. Gel'found-Baker 方法在丢番图方程中的应用[M]. 北京:科学出版社,1998:219-222.

[4] Cao Z F,Dong X L. An application of a lower bound for linear forms in two logarithms to the Terai-Jesmanowicz conjecture[J]. Acta Arith,2003,110(2):153-164.

[5] 杨仕椿. 指数丢番图方程 $|m^4 - 6m^2 + 1|^x + (4m^3 - 4m)^y = (m^2 + 1)^z$ 的解[J]. 广西科学,2007,14(1):19-21.

[6] Hu Y Z,Yuan P Z. On the exponential diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ [J]. Acta Mathematica Sinica,Chinese Series,2005,48(6):1175-1178.

[7] Le M H. An open problem concerning the diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ [J]. Publ Math Debrecen,2006,68 (3/4):283-295.

[8] Le M H. A note on the Diophantine systema $a^2 + b^2 = c^r$ and $a^x + b^y = c^z$ [J]. Acta Mathematica Sinica,Chinese Series,2008,51(4):677-684.

[9] 乐茂华. 广义商高数的纯指数 Diophantine 方程 $a^x + b^y = c^z$ [J]. 数学学报,2010,53(6):1239-1248.

[10] Xia J J,Yuan P Z. On the Teari-Jesmanowicz conjecture [J]. Acta Mathematica sinica,English series,2008,24 (12):2061-2064.

(责任编辑:尹　闯)