DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.01.016

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(1):22～26

正相协误差半参数回归模型小波估计的强相合性*

Strong Consistency of Wavelet Estimator for Semiparametric Regression Model under Positive Association Errors

丁立旺[1],李永明[2]**

DING Li-wang[1],LI Yong-ming[2]

(1.广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530023;2.上饶师范学院数学与计算机学院,江西上饶 334001)

(1.Collge of Mathematical Science,Guangxi Teachers University,Nanning,Guangxi,530023,China;2.Collge of Mathematics and Computer,Shangrao Normal University,Shangrao,Jiangxi,334001,China)

摘要:研究半参数回归模型 $y_i = x_i\beta + g(t_i) + e_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,$\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为正相协序列的未知参数 β 和未知函数 $g(t)$ 小波估计的强相合性,得到它们的强收敛速度.

关键词:小波估计 半参数回归模型 强相合性 收敛速度

中图法分类号:O212.7 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2013)01-0022-05

Abstract:For semiparametric regression model $y_i = x_i\beta + g(t_i) + e_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,where error $\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ is positive association sequences,we study the strong consistency and convergence rate of the wavelet estimator for β and $g(t)$ under suitable conditions.

Key words:wavelet estimators,semiparametric regression model,strong consistency,convergence rate

正相协(PA)随机变量[1]在多元统计分析,渗透理论,可靠性理论中有应用,而且涉及多门学科,如海洋、生物、经济等.因此,关于正相协随机变量的研究已成为近年来的热门课题.Campos 等[2]在误差独立同分布时,用核估计的方法讨论有关估计量的平均相合性、强相合性和渐近正态性,其结果包括连续型随机变量的密度函数及离散型随机变量的概率函数的估计问题.文献[3]对部分和的完全收敛性进行讨论,并给出部分和完全收敛性的矩不等式.文献[4]证明非参数回归模型中权函数估计的一致渐近正态性,并给出一致渐近正态性收敛速度,即在较合理的条件下,这个速度将达到 $n^{-3/14}$.对于固定设计回归模型

$$y_i = x_i\beta + g(t_i) + e_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad (0.1)$$

其中(x_i, t_i)为 $R \times [0,1]$ 上固定的非随机设计点列,β 为未知待估回归参数,$g(t)$ 是定义在闭区间$[0,1]$上的未知函数,$\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是均值为零的随机误差,文献[5]在误差为 i.i.d 情况下,用权函数估计研究参数 β 和方差 σ^2 的精确收敛速度.文献[6]在误差为 NA 序列下,研究未知参数 β 的小波估计的强相合性,同时也得到了未知函数 $g(\cdot)$ 小波估计的一致强相合.文献[7]也在误差为 i.i.d.情况下,研究未知参数 β 小波估计的强相合性,并得到它们的强收敛速度.文献[8]把小波光滑方法和随机加权方法结合起来,获得半参数回归模型中参数分量小波估计的随机加权逼近速度为 $O(n^{-1/2})$.

从已有的报道结果[4,6～11]可以发现,小波估计方法已广泛用于非参数回归模型和半参数回归模型及参数模型的各种统计推断中.本文继续研究模型(0.1),把小波光滑和最小二乘法等结合起来,在误差 $\{e_i\}$ 为正相协序列的条件下,对 β 和 $g(\cdot)$ 的相关估计

收稿日期:2012-11-29

作者简介:丁立旺(1985-),男,硕士研究生,主要从事概率与数理统计研究。

*国家自然科学基金项目(11061029)资助。

**通讯作者:李永明(1970-),男,教授,硕士生导师,主要从事概率与数理统计研究。

量$\hat{\beta}_n$，$\hat{g}_n(t)$的小波估计的强相合性和$\hat{g}_n(t)$的一致强相合进行了讨论，得到了它们的强收敛速度.

1　预备知识

令 $E_m(t,s) = 2^m E_0(2^m t, 2^m s) = 2^m \sum_{k\in Z}\phi(2^m t - k)\phi(2^m s - k)$. 记$A_i = [s_{i-1}, s_i]$为$[0,1]$上的分割$s_i = (1/2)(t_i + t_{i+1})$，且$t_i \in A_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 由于(0.1)式可改为

$$y_i - x_i\beta = g(t_i) + e_i, i = 1,\cdots,n, \tag{1.1}$$

那么由$Ee_i = 0$，有$E(y_i - x_i\beta) = g(t_i)$，$i = 1,\cdots,n$. 当$\beta$为已知时，可定义$g(\cdot)$的估计为

$$g_n(t) := g_n(t,\beta) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i\beta)\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s. \tag{1.2}$$

若记$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2$，$\tilde{x}_i = x_i - \sum_{j=1}^{n}x_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s$，$\tilde{y}_i = y_i - \sum_{j=1}^{n}y_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s$，$\tilde{e}_i = g(t_i) - g_n(t_i) + e_i$，$i = 1,\cdots,n$. 那么求$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i\beta - g_n(t_i))^2$达到最小值的解时，利用偏残差法和最小二乘法，得到$\beta$的估计为

$$\hat{\beta}_n = \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{y}_i/S_n^2, \tag{1.3}$$

从而得到$g(\cdot)$的最终估计为

$$\hat{g}_n(t) := g_n(t,\hat{\beta}_n) = \sum\nolimits_{i=1}^{n}(y_i - x_i\hat{\beta}_n)\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

定义　称随机变量$X_1,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$是正相协的. 如果对$\{1,2,\cdots,n\}$的任何两个不相交的非空子集$A_1$与$A_2$，都有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i, i\in A_1), f_2(X_j, j\in A_2)) \geqslant 0,$$

其中f_1和f_2是任何两个使得协方差存在且对每个变元均非降(或同时每个变元均非升)的函数. 称随机序列$\{X_i, i\in N\}$是正相协的，若对于每个$n\geqslant 2$，随机变量$X_1,\cdots,X_n$都是正相协的.

为了论述的需要，给出如下说明及假设(A1～A10). 文中$c_1,c_2,\cdots,C$均为任意常数(即使在同一式子中也可以不同)，"$\ll$"表示远远小于.

(A1) $g(\cdot)$，$h(\cdot)$在$I = [0,1]$上连续，$x_i = h(t_i) + u_i$以及$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 = \sigma$，$0 < \sigma < \infty$；

(A2) $g(\cdot)$，$h(\cdot) \in H^\alpha$，$\alpha > 2/3$，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{h}(t_i)| = O(2^{-m})$；

(A3) $\phi\in S_r$，$r\geqslant\alpha$. $\phi(\cdot)$满足1阶Lipschitz条件，且当$\xi\to 0$，$|\hat{\phi}(\xi) - 1| = O(\xi)$，其中$\hat{\phi}$为$\phi$的Fourier变换；

(A4) $c_1/n \leqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i - t_{i-1}) \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i - t_{i-1}) \leqslant c_2/n$；

(A5) $c_3 n^{1/4}(\log n)^{1/4} \leqslant 2^m \leqslant c_4 n^{1/2}(\log n)^{-3/2}$；

(A6) $c_5 n^{1/3} \leqslant 2^m \leqslant c_6 n^{1/3}$；

(A7)(i) $\sup\limits_{t\in I}\sum_{i=1}^{n}|x_i\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s| \leqslant C$；

(ii) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\sum_{i=1}^{n}u_i\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s| \leqslant C$；

(iii) $|\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s| = O(2^m/n)$；

(A8)(i) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{x}_i/S_n^2| = O(n^{-\lambda})$，其中$1/2 + 1/r < \lambda$；

(ii) $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = O(1)$，$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = O(1)$；

(A9) (i) $\{\xi_j, j\geqslant 1\}$是平稳PA随机变量序列，具有零均值和有限二阶矩，$\sup\limits_{j\geqslant 1}E(\xi_j^2) < \infty$；

(ii) 对每一个n，$\{e_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$的联合分布与$\{\xi_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$的联合分布相同；

(A10) 对某个$r > 2$及$\delta > 0$，$\sup\limits_{j\geqslant 1}E|\xi_j|^{r+\delta} < \infty$，$u(n) := \sum\nolimits_{j=n}^{\infty}\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_{j+1})$，$u(n) = O(n^{-(r-2)(r+\delta)/(2\delta)})$.

引理1[12]　设$\phi\in S_q$，则

(1) $\int_0^1 E_m(x,y)\mathrm{d}y \to 1$，对$t\in[0,1]$一致成立，$m\to\infty$；

(2) $\sup\limits_{m\geqslant 1}\int_0^1|E_m(x,y)|\mathrm{d}y < C < \infty$；

(3) $\int_0^1|E_m(x,y)|I(|t_i - t| > \varepsilon)\mathrm{d}y \to 0$，对$x\in[0,1]$一致成立，$\varepsilon, m\to\infty$.

引理2[8]　如果$\phi\in S_r$，$r\geqslant\alpha$. $\phi(\cdot)$满足1阶Lipschitz条件，且当$\xi\to 0$，$|\hat{\phi}(\xi) - 1| = O(\xi)$，其中$\hat{\phi}$为$\phi$的Fourier变换，$c_1/n \leqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i - t_{i-1}) \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i - t_{i-1}) \leqslant c_2/n$，则

(1) $\sup\limits_{0\leqslant t,s\leqslant 1}|E_m(t,s)| = O(2^m)$；

(2) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1|E_m(t,s)|\mathrm{d}s \leqslant C$；

(3) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}|E_m(t_i,s)|\mathrm{d}s \leqslant C$；

(4) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\int_{A_j}|E_m(t_i,s)|\mathrm{d}s \leqslant C$.

引理3[6]　设$I_k^{(n)} = \{t \mid |t - t_k^{(n)}| < n^{-\lambda}\}$，对$\forall\mu, u\in I_k^{(n)}$，当$n\to\infty$时，有$\int_{A_i}E_m(\mu,s)\mathrm{d}s =$

$\int_{A_i} E_m(u,s)\mathrm{d}s$. 若 $|\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s| = O(2^m/n), i=1, 2,\cdots,2^m = O(n^{1/3}), E_o(t,s)$ 关于 t 一致满足 Lipschitz 条件，且 $E(\sum_{i=1}^{n} e_i^2) = O(n^{1/3-\theta}), 0<\theta<1/3$，则 $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\sum_{i=1}^{n} e_i\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s = 0$, a. s..

引理 4[11] 设 $\{\varepsilon_j, j\geqslant 1\}$ 是平稳 PA 随机变量序列，且具有零均值和有限二阶矩. 记 $S_n = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$，$\sup_{j\geqslant 1} E(\varepsilon_j^2)<\infty$，对某个 $r>2$ 及 $\delta>0$，$\sup_{j\geqslant 1} E|\varepsilon_j|^{r+\delta}<\infty$，$u(n)=O(n^{-(r-2)(r+\delta)/(2\delta)})$. 则

$$\sup_{m\in N\cup 0} E|S_{n+m}-S_n|^r \leqslant Cn^{r/2}.$$

引理 5[4] 设 $\{\xi_j, j\geqslant 1\}$ 是平稳 PA 随机变量序列，且具有零均值和有限二阶矩，$\sup_{j\geqslant 1} E(\xi_j^2)<\infty$，对某个 $r>2$ 及 $\delta>0$，$\sup_{j\geqslant 1} E|\xi_j|^{r+\delta}<\infty$，$u(n)=O(n^{-(r-2)(r+\delta)/(2\delta)})$. 又设 $\{a_j, j\in N\}$ 是一实数列，$a:=\sup|a_j|<\infty$，则

$$E|\sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j|^r \leqslant Ca^r n^{r/2}.$$

引理 6 设 $\{e_i, i\geqslant 1\}$ 是平稳 PA 随机变量序列，条件(A9)，(A10)，成立，那么有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k} e_i| = o(n^{1/2}\log n), \quad (1.5)$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2 \to \sigma. \quad (1.6)$$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$，根据 Markov 不等式及引理 4，知

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k} e_i| > \varepsilon n^{1/2}\log n) \leqslant$$
$$E|\sum_{i=1}^{m} e_i|^r/(\varepsilon n^{1/2}\log n)^r \leqslant C(\log n)^{-r},$$

从而再由 Borel -Cantelli 引理，知(1.5) 式成立. 由条件(A1)，(A7) 和引理 2(3) 可知(1.7) 式成立：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\sum_{i=1}^{n} x_i\int_{A_i} E_m(t_i,s)\mathrm{d}s| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|h(t_i)|\cdot \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}|E_m(t_i,s)|\mathrm{d}s + \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\sum_{i=1}^{n} u_i\int_{A_i} E_m(t_i,s)\mathrm{d}s| = O(1). \quad (1.7)$$

又由于

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \sum_{j=1}^{n} x_j\int_{A_j} E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i(\sum_{j=1}^{n} x_j\int_{A_j} E_m(t_i,s)\mathrm{d}s) + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} x_j\int_{A_j} E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)^2 \leqslant n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\sum_{i=1}^{n} x_i\int_{A_i} E_m(t_i,s)\mathrm{d}s|\cdot 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\sum_{i=1}^{n} x_i\int_{A_i} E_m(t_i,s)\mathrm{d}s|^2,$$

所以由条件(A8(ii)) 及(1.7) 式，知(1.6) 式成立.

2 主要结果

定理 1 当条件(A3) ～(A4)，(A6) ～(A7)，A8(i)，(A9) ～(A10) 成立，且 $\{e_i, i\geqslant 1\}$ 为同分布的平稳 PA 序列，那么

$$\hat{\beta}_n \to \beta, \text{a. s.}. \quad (2.1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}|\hat{g}_n(t) - g(t)| = 0, \text{a. s.}. \quad (2.2)$$

证明 由(0.1) 式和(1.2) 式得

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} e_i\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s, \quad Eg_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s,$$

$$g_n(t) - Eg_n(t) = \sum_{i=1}^{n} e_i\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s.$$

由于 $g(t)$ 在闭区间 I 上连续，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $|t'-t|\leqslant\eta$ 时，有 $|g(x')-g(x)|<\varepsilon$. 设 $|g(t)|\leqslant c<\infty$. 又由于

$$\sup_{t\in I}|Eg_n(t)-g(t)| \leqslant \sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n} g(t_i)\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{n} g(t)\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s| + \sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n} g(t)\cdot\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s - g(t)| = \sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s(g(t_i) - g(t))| + \sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n} g(t)\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s - g(t)| \leqslant$$
$$\sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s||g(t_i)-g(t)| + |g(t)|\cdot|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s - 1| \leqslant \sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} E_m(t,s)|\cdot|g(t_i)-g(t)|I(|t_i-t|>\delta)\mathrm{d}s + \sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} E_m(t,s)||g(t_i)-g(t)|I(|t_i-t|\leqslant\delta)\mathrm{d}s + \sup_{t\in I}|g(t)|\cdot|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s - 1| \leqslant 2c\sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|E_m(t,s)|\cdot|I(|t_i-t|>\delta)\mathrm{d}s + \varepsilon\sup_{t\in I}\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|E_m(t,s)|\mathrm{d}s + c\sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} E_m(t,s)\mathrm{d}s - 1|,$$

故对任一 $\delta>0$，当 $0<\delta<\eta$ 时，由引理 1 可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}|Eg_n(t)-g(t)| = 0. \quad (2.3)$$

而又由引理 3 可知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}|g_n(t)-Eg_n(t)|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\sum_{i=1}^{n}e_i\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s=0,\text{a. s.}. \qquad (2.4)$$

又由于

$$\sup_{t\in I}|g_n(t)-g(t)|\leqslant\sup_{t\in I}|g_n(t)-Eg_n(t)|+\sup_{t\in I}|Eg_n(t)-g(t)|,$$

那么结合由(2.3)式,(2.4)式得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}|g_n(t)-g(t)|=0,\text{a. s.}. \qquad (2.5)$$

$$\hat{\beta}_n-\beta=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{y}_i/S_n^2-\beta=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i[y_i-\sum_{j=1}^{n}y_i\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s]/S_n^2-\beta=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i[x_i\beta+g(t_i)+e_i-g_n(t_i)-\sum_{i=1}^{n}x_i\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s\beta]/S_n^2-\beta=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i[\tilde{x}_i\beta+g(t_i)+e_i-g_n(t_i)]/S_n^2-\beta=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i/S_n^2+\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i[g(t_i)-g_n(t_i)]/S_n^2\leqslant$$

$$|\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i/S_n^2|+\sup_{t\in I}|g(t_i)-g_n(t_i)|\sum_{i=1}^{n}|\tilde{x}_i|/S_n^2. \qquad (2.6)$$

又对 $\forall\varepsilon>0$,根据 Markov 不等式,引理 5 及条件(A8(i)),得

$$P(|\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i/S_n^2|>\varepsilon)\leqslant E|\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i/S_n^2|^r/\varepsilon^r\leqslant C\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{x}_i/S_n^2|^r n^{r/2}\leqslant Cn^{-(\lambda-1/2)r},$$

所以

$$\sum_n P(|\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i/S_n^2|>\varepsilon)<\infty.$$

从而由 Borel -Cantelli 引理,知

$$|\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i/S_n^2|\to 0,\text{a. s.}. \qquad (2.7)$$

因此由(2.5)~(2.7)式,条件(A8(i))得(2.1)式.

又由(1.2)式和(1.4)式及条件(A7),有

$$\sup_{t\in I}|\hat{g}_n(t)-g_n(t)|=\sup_{t\in I}|\sum_{i=1}^{n}x_i\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s(\beta-\hat{\beta}_n)|\leqslant\sup_{t\in I}\sum_{i=1}^{n}|x_i\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s||\beta-\hat{\beta}_n|\leqslant C|\beta-\hat{\beta}_n|.$$

由(2.1)式,知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}|\hat{g}_n(t)-g_n(t)|=0,\text{a. s.}. \qquad (2.8)$$

又有

$$\sup_{t\in I}|\hat{g}_n(t)-g(t)|\leqslant\sup_{t\in I}|\hat{g}_n(t)-g_n(t)|+\sup_{t\in I}|g_n(t)-g(t)|,$$

再结合(2.5)式和(2.8)式,可得到(2.2)式成立.

定理 2 (i)在条件(A1)~(A5),(A7),引理 2 及(2.1)式成立的情况下,如果

$$\lim_{n\to\infty}\sup 1/(\sqrt{n}\log n)\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum\nolimits_{i=1}^{m}u_{ji}|<\infty,$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|u_i|=O(n^{1/2}(\log n)^{1/2}),$$

那么

$$\hat{\beta}_n-\beta=O(n^{-1/2}(\log n)^{1/2}),\text{a. s.}. \qquad (2.9)$$

(ii)在条件(A1)~(A4),(A6),(A7),引理 2 及(2.1)式成立情况下,如果 $\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum\nolimits_{i=1}^{m}u_{ji}|=O(n^{1/3}\log n)$,那么

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}_n(t)-g(t)|=O(n^{-1/3}\log n),\text{a. s.}. \qquad (2.10)$$

证明 (i)记 $\tilde{g}_i=\tilde{g}(t_i)$,$\tilde{h}_i=\tilde{h}(t_i)$,$\tilde{x}_i=\tilde{h}_i+u_i-\sum_{i=1}^{n}u_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s$,

$$\hat{\beta}_n-\beta=S_n^{-2}\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i-\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i(\sum_{j=1}^{n}e_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{g}_i\}:=S_n^{-2}\{I_{1n}-I_{2n}+I_{3n}\}.$$

由(1.6)式可知,只需证明 $\{I_{1n}-I_{2n}+I_{3n}\}=O(\sqrt{n\log n})$ 即可.

$$|I_{1n}|=|\sum_{i=1}^{n}u_ie_i+\sum_{i=1}^{n}\tilde{h}_ie_i-\sum_{i=1}^{n}e_i(\sum_{j=1}^{n}u_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)|\ll\max_{1\leqslant i\leqslant n}|u_i|\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}e_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{h}_i|\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}e_i|+$$

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s|\cdot\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}u_{ji}|\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}e_i|=O(n^{1/2}(\log n)^{1/2})\cdot o(n^{1/2}\log n)+O(2^{-m})\cdot o(n^{1/2}\log n)+O(2^m/n)\cdot O(n^{1/2}\log n)\cdot o(n^{1/2}\log n)=O(\sqrt{n\log n}).$$

$$|I_{2n}|=|\sum_{i=1}^{n}u_i(\sum_{j=1}^{n}e_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{h}_i(\sum_{j=1}^{n}e_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)-\sum_{i=1}^{n}(\sum_{p=1}^{n}u_p\int_{A_p}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)(\sum_{j=1}^{n}e_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s)|\ll$$

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s|\cdot\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}u_{ji}|\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}e_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{h}_i|\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s|\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}e_i|+\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s|\cdot$$

$$\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{m}u_{ji}\right|\cdot\max_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s\right|\cdot\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{m}u_{ji}\right|=O(2^m/n)\cdot O(n^{1/2}\log n)\cdot o(n^{1/2}\log n)+O(2^{-m})\cdot O(1)\cdot o(n^{1/2}\log n)+O(2^m/n)\cdot O(n^{1/2}\log n)\cdot O(1)\cdot O(n^{1/2}\log n)=O(\sqrt{n\log n}).$$

$$|I_{3n}|=\left|\sum_{i=1}^{n}u_i\tilde{g}_i+\sum_{i=1}^{n}\tilde{h}_i\tilde{g}_i-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}u_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s\right)\tilde{g}_i\right|\ll\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}_i|\cdot\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{m}u_{ji}\right|+n\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{h}_i|\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}_i|\cdot\max_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}\int_{A_j}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|\cdot\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{m}u_{ji}\right|=O(2^{-m})\cdot O(n^{1/2}\log n)+n\cdot O(2^{-m})\cdot O(2^{-m})+O(2^{-m})\cdot O(1)\cdot O(n^{1/2}\log n)=O(\sqrt{n\log n}).$$

再证明(ii).因为

$$\sup_{t\in I}|\hat{g}_n(t)-g(t)|\leqslant\sup_{t\in I}\left|\sum_{i=1}^{n}e_i\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s\right|+\sup_{t\in I}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i(\hat{\beta}_n-\beta)\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s\right|+\sup_{t\in I}\left|\sum_{i=1}^{n}g(t_i)\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s-g(t)\right|:=B_{1n}-B_{2n}+B_{3n}.$$

由条件(A4),(A6)和引理2可知

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|E_m(t,s)|\mathrm{d}s=O(1);$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|=O(2^m/n)=(n^{-2/3}).$$

由于 $E_0(t,s)$ 对 s 满足1阶 Lipschitz 条件,所以可得 $|E_m(t_1,s)-E_m(t_2,s)|\leqslant C2^{2m}|t_1-t_2|$.当 $s,t_1,t_1\in[0,1]$ 时也有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\int_{A_i}E_m(t_1,s)\mathrm{d}s-\int_{A_i}E_m(t_2,s)\mathrm{d}s\right|=O(|t_1-t_2|).$$

$$B_{1n}\ll\sup_{t\in I}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}e_i\right|\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\int_{A_i}E_m(t_1,s)\mathrm{d}s-\int_{A_i}E_m(t_2,s)\mathrm{d}s\right|\right\}=O(n^{1/2}\log n)\cdot O(|t_1-t_2|)=O(n^{-1/3}\log n).$$

$$B_{2n}\ll\sup_{t\in I}\left\{|\hat{\beta}_n-\beta|\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|E_m(t_i,s)\mathrm{d}s|\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|h(t_i)|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\int_{A_i}E_m(t_i,s)\mathrm{d}s\right|\cdot\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{m}u_{ji}\right|\right\}=O(n^{-1/2}(\log n)^{1/2})\cdot O(1)\cdot O(2^{-m})+O(n^{1/3}\log n)\cdot O(n^{-2/3})=O(n^{-1/3}\log n).$$

$$B_{3n}\leqslant\sup_{t\in I}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{A_i}E_m(t_i,s)\right|\mathrm{d}s\cdot|g(t_i)-g(t)|\right\}=O(1).$$

所以 $B_{1n}-B_{2n}+B_{3n}=O(n^{-1/3}\log n)$.

参考文献:

[1] Esary J,Proschan F,Walkup D. Association of random variables with applications[J]. Ann Math Statist,1967,38:1466-1474.

[2] Campos V S M,Dorea C C Y. Kernel density estimation:the general case[J]. Statistic Probab Lett,2001,55(2):173-180.

[3] 杨善朝. PA 序列部分和的完全收敛性[J]. 应用概率统计,2001,17(2):197-202.

[4] 杨善朝,黎玉芳. PA 样本回归权函数估计的一致渐近正态性[J]. 应用概率统计,2005,21(2):150-160.

[5] 陈明华. 固定设计下半参数回归模型参数估计的收敛速度[J]. 应用概率统计,1998,14(2):149-158.

[6] 李永明,韩龙生. NA 序列半参数回归模型小波估计的强相合性[J]. 数学的实践与认识,2007,37(20):47-52.

[7] 钱伟民,柴根象. 半参数回归模型小波估计的强逼近[J]. 中国科学:A 辑,1999,29(3):233-240.

[8] 薛留根. 半参数回归模型中小波估计的随机加权逼近速度[J]. 应用数学学报,2003,26:11-25.

[9] 李永明,韦程东. 强混合误差回归函数小波估计的 Berry-Esseen 界[J]. 数学物理学报,2009,29A(5):1453-1463.

[10] 李永明,尹长明,韦程东. φ 混合误差下回归函数小波估计的渐近正态性[J]. 应用数学学报,2008,31(6):1046-1055.

[11] Birkel,T. Moment bounds for associated sequences[J]. Ann Probab,1988,16:1184-1193.

[12] Walter G G. Wavelet and other orthogonal systems with applications[M]. CRC Press,Inc,1994.

(责任编辑:尹　闯)