DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.01.001

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(1):1～4

一类广义离散系统的有限时间控制*

Finite-time Control for a Class of Singular Discrete-time Systems

樊仲光[1],肖　剑[2],梁家荣[3]
FAN Zhong-guang[1],XIAO Jian[2],LIANG Jia-rong[3]

(1.河池学院教师教育学院,广西宜州　546300;2.华中科技大学控制科学与工程系,湖北武汉　430074;3.广西大学计算机与电子信息学院,广西南宁　530004)
(1.School of Teacher Education,Hechi University,Yizhou,Guangxi,546300,China;2.Department of Control Science and Engineering,Huazhong University of Science and Technology,Wuhan,Hubei,430074,China;3.School of Computer and Electronic Information Science,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:讨论一类具有时变、有限能量外部扰动的广义离散系统的有限时间控制问题,给出非强迫广义离散系统有限时间有界的充分条件,并在此基础上利用非严格线性矩阵不等式方法,提出实现相应的闭环系统有限时间有界的状态反馈控制器与输出反馈控制器的设计方法.

关键词:广义离散系统　有限时间有界　外部扰动　线性矩阵不等式
中图法分类号:O231　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2013)01-0001-04

Abstract:The finite time control problem is discussed for a class of singular discrete-time system with time-varying norm-bounded exogenous disturbance. A sufficient condition is presented to guarantee the corresponding unforced singular discrete-time system finite-time bounded;and then,the concrete designs of state feedback controller and output feedback controller are given to realize the resulting closed-loop systems by using the method of non-strict linear matrix inequality on this foundation.

Key words:singular discrete-time systems,finite-time bounded,exogenous disturbance,linear matrix inequality (LMI)

在稳定性控制理论研究中,人们常常关注的系统稳定性主要是 Lyapunov 意义下的稳定性.而 Lyapunov 意义下的稳定性刻画的是系统的稳态性能,它并不能反映系统的暂态性能.一个在 Lyapunov 意义下稳定的系统,可能具有很坏的暂态性能(如超调量过大),有时在工程中甚至根本无法应用[1].因此,在实际工程中,人们不仅对系统的稳定性感兴趣,而且更希望系统满足一定的暂态性能要求.例如研究系统轨线对于平衡点的一定偏离范围的要求,因此,研究系统的有限时间有界问题有一定的现实意义与理论价值.到目前为止关于系统的有限时间控制问题,已经有不少的研究成果,2001 年,Amat 等[2]讨论一类具有时变参数不确定性和定常外部扰动的线性系统的有限时间控制问题.2005 年,他们又[3]研究离散时间系统的有限时间控制问题;随后,他们[4]还提出了使得闭环系统为有限时间有界的动态输出反馈控制器的设计方法[3].

广义系统是一类比正常系统更具有广泛形式的动力系统,在电网、核反应、航空工程、神经网络、石油化工等许多领域中有极为具体的模型,因而受到人们的广泛关注[5~11].而对于线性广义系统的有限时间控制是近几年才提出来的,2005 年,冯俊娥等[12,13]将有限时间控制概念应用到了不确定线性广义系统.但是对于广义离散系统的有限时间控制的研究文献尚属少见,本文的目的就是给出广义离散系

收稿日期:2012-07-16
作者简介:樊仲光(1972-),男,副教授,主要从事广义系统与变结构控制研究。
*国家自然科学基金项目(61064002);教育部"新世纪优秀人才支持计划"专项基金项目(NCET-06-0756)资助。

统有限时间有界的充分条件,并在此基础上给出相关状态反馈控制器和输出反馈控制器的设计方法.

文中涉及的相关术语:$M \leqslant 0$ 表示 M 是一个对称半负定矩阵;$M < 0$ 表示 M 是一个对称负定矩阵;$\lambda(M)$ 表示矩阵 M 的特征值;$\lambda_{\min}(M)$ 表示矩阵 M 的最小特征值;$\lambda_{\max}(M)$ 表示矩阵 M 的最大特征值.

1 预备知识

考虑如下正则广义离散系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fw(k), \quad (1)$$

其中:$x(k) \in R^n$ 为状态变量,$u(k) \in R^m$ 为控制输入,$E \in R^{n\times n}$ 为奇异矩阵,且 $\mathrm{rank}(E) = r$,$A \in R^{n\times n}$,$B \in R^{n\times m}$,$F \in R^{n\times r}$ 均为常数矩阵,$w(k) \in R^l$ 为外部扰动,且满足:

$$\sum_{i=1}^{\infty} w^{\mathrm{T}}(i)w(i) \leqslant d, \quad (2)$$

$d > 0$ 为给定的常量. 在状态反馈控制器 $u(k) = Kx(k)$,$K \in R^{m\times n}$,的作用下,系统(1)的闭环系统为

$$Ex(k+1) = (A+BK)x(k) + Fw(k). \quad (3)$$

定义 1 称广义离散系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Fw(k) \quad (4)$$

关于 $(\sigma,\varepsilon,d,R,N)$ 是有限时间有界(FTB)的,如果当 $x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}REx(0) < \sigma$ 时,有 $x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k) < \varepsilon$,$k \in \{1,2,\cdots,N\}$,其中 $\sigma > 0$,$\varepsilon > 0$ 为常数,$R > 0$ 为给定的矩阵,N 为给定的正整数,$w(k)$ 满足(2)式.

注 1 Lyapunov 渐近稳定和有限时间有界(FTB)是两个不同的概念. 一个有限时间有界系统不一定是 Lyapunov 渐近稳定的,同样,一个 Lyapunov 渐近稳定的的系统也不一定是有限时间有界的.

引理 1 对给定的对称矩阵 $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$,其中 S_{11} 是 $r\times r$ 维的,$S_{22} < 0$. 则以下的两个条件是等价的

(Ⅰ) $S \leqslant 0$;

(Ⅱ) $S_{11} - S_{12}S_{22}S_{12}^{\mathrm{T}} \leqslant 0$.

证明 (Ⅰ)⇔(Ⅱ)注意到

$$S \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

所以引理 1 成立.

2 主要结果

定理 1 设广义离散系统(4)是因果的,如果存在对称正定矩阵 $P \in R^{n\times n}$,$P_1 \in R^{l\times l}$ 和标量 $\gamma \geqslant 1$,使得下面条件成立:

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}PA - \gamma E^{\mathrm{T}}PE & A^{\mathrm{T}}PF \\ F^{\mathrm{T}}PA & F^{\mathrm{T}}PF - \gamma P_1 \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad (5)$$

$$\lambda_{\max}(\bar{P})\sigma + \lambda_{\max}(P_1)d < \frac{\varepsilon\lambda_{\min}(\bar{P})}{\gamma^N}. \quad (6)$$

其中:$\bar{P} = R^{\frac{-1}{2}}PR^{\frac{-1}{2}}$,$\lambda(\cdot)$ 表示矩阵的特征值. 则系统(4)关于 $(\sigma,\varepsilon,d,R,N)$ 是有限时间有界的

证明 令 $V(x(k)) = x(k)^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PEx(k)$,则

$$\begin{aligned} &Ex(k+1) = x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}PEx(k+1) = \\ &(Ax(k)+Fw(k))^{\mathrm{T}}P(Ax(k)+Fw(k)) = \\ &x^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}PAx(k) + w^{\mathrm{T}}(k)F^{\mathrm{T}}PAx(k) + \\ &x^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}PFw(k) + w^{\mathrm{T}}(k)F^{\mathrm{T}}P_1Fw(k) = \\ &\begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}PA & A^{\mathrm{T}}PF \\ F^{\mathrm{T}}PA & F^{\mathrm{T}}PF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

由条件(5)可得

$$V(x(k+1)) \leqslant \gamma V(x(k)) + \gamma w^{\mathrm{T}}(k)P_1w(k). \quad (8)$$

再反复利用(8)式可得

$$\begin{aligned} &V(x(k)) \leqslant \gamma^k V(x(0)) + \sum_{i=1}^{k}\gamma^k w^{\mathrm{T}}(k-i)P_1w(k-i) = \gamma^k[V(x(0)) + \sum_{i=1}^{k}\gamma^{i-k}w(k-i)P_1w(k-i)] \leqslant \gamma^k[V(x(0)) + \\ &\lambda_{\max}(P_1)\sum_{i=1}^{k}\gamma^{i-k}w(k-i)w(k-i)]. \end{aligned}$$

因为 $\lambda \geqslant 1$,一方面

$$V(x(k)) \leqslant \gamma^k[V(x(0)) + \lambda_{\max}(P_1)\sum_{i=1}^{k}w(k-i)w(k-i)] \leqslant \gamma^N[\lambda_{\max}(\bar{P})\sigma + \lambda_{\max}(P_1)d]. \quad (9)$$

另一方面

$$V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k) \geqslant \lambda_{\min}(\bar{P})x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k). \quad (10)$$

由(9)式与(10)式可得

$$x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k) \leqslant \frac{\gamma^N[\lambda_{\max}(\bar{P})\sigma + \lambda_{\max}(P_1)d]}{\lambda_{\min}(\bar{P})}.$$

条件(6)意味着 $x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k) \leqslant \varepsilon$,$k = 1,2,\cdots,N$,从而广义离散系统(4)是有限时间有界的.

注 2 在定理 1 中,如果取 $\gamma = 1$,当条件(5)变为严格线性矩阵不等式时,能保证广义离散系统(4)在 $F = 0$ 情况下是渐近稳定且因果的,即广义离散系统(4)是容许的. 条件(6)则保证 $x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k) \leqslant \varepsilon$ 对所有 $k = 1,2,\cdots,N$ 成立.

注 3 当 E 非奇异时，系统(1)是一个正常离散线性系统，此时(5)式中$\leqslant$换成$<$也成立，从而可以用严格线性矩阵不等式的方法解决问题.

定理 2 设广义离散系统(1)是因果的，如果存在对称正定矩阵 $Q\in R^{n\times n}$，$Q_1\in R^{l\times l}$ 和矩阵 $L\in R^{m\times n}$ 以及标量 $\gamma\geqslant 1$，使得下面条件成立：

$$\begin{bmatrix} \gamma QE^{\mathrm{T}}Q^{-1}EQ & 0 & (AQ+BL)^{\mathrm{T}} \\ 0 & \gamma Q_1 & F^{\mathrm{T}} \\ AQ+BL & F & -Q \end{bmatrix}\leqslant 0, \quad (11)$$

$$\frac{\sigma}{\lambda_{\min}(\bar{Q})}+\lambda_{\max}(Q_1)d<\frac{\varepsilon}{\gamma^N\lambda_{\max}(\bar{Q}_1)}, \quad (12)$$

其中 $\bar{Q}=R^{\frac{1}{2}}QR^{\frac{1}{2}}$，且(11)式和(12)式存在可行解，控制器的反馈控制增益 $K=LQ^{-1}$. 则广义离散系统(3)关于 $(\sigma,\varepsilon,d,R,N)$ 是有限时间有界的.

证明 令 $Q=P^{-1}$，$Q_1=P_1$，由于

$$\lambda_{\max}(Q)=\frac{1}{\lambda_{\min}(Q^{-1})},$$

则条件(6)和(12)等价. 令 $\bar{A}=A+BK$，则条件(5)可以写为

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}}Q^{-1}\bar{A}-\gamma E^{\mathrm{T}}Q^{-1}E & \bar{A}^{\mathrm{T}}Q^{-1}F \\ F^{\mathrm{T}}Q^{-1}\bar{A} & F^{\mathrm{T}}Q^{-1}F-\gamma Q_1 \end{bmatrix}\leqslant 0. \quad (13)$$

在(13)式左右两边分别乘以矩阵 $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 和其转置，可得如下等价不等式：

$$\begin{bmatrix} Q\bar{A}^{\mathrm{T}}Q^{-1}AQ-\gamma QE^{\mathrm{T}}Q^{-1}EQ & Q\bar{A}^{\mathrm{T}}Q^{-1}F \\ F^{\mathrm{T}}Q^{-1}\bar{A}Q & F^{\mathrm{T}}Q^{-1}F-\gamma Q_1 \end{bmatrix}\leqslant 0,$$

其中 $-Q<0$. 由引理 1 可知，(13)式和下式等价：

$$\begin{bmatrix} Q\bar{A}^{\mathrm{T}}Q^{-1}AQ-\gamma QE^{\mathrm{T}}Q^{-1}EQ & Q\bar{A}^{\mathrm{T}}Q^{-1}F & 0 \\ F^{\mathrm{T}}Q^{-1}\bar{A}Q & -\gamma Q_1 & F^{\mathrm{T}} \\ 0 & F & -Q \end{bmatrix}\leqslant 0. \quad (14)$$

再用矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 & -Q\bar{A}Q^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

及其转置乘以(14)式左右两边，可得

$$\begin{bmatrix} -\gamma QE^{\mathrm{T}}Q^{-1}EQ & 0 & Q\bar{A}^{\mathrm{T}} \\ 0 & -\gamma Q_1 & F^{\mathrm{T}} \\ \bar{A}Q & F & -Q \end{bmatrix}\leqslant 0. \quad (15)$$

注意 $\bar{A}=A+BK$，令 $L=KQ$，即 $K=LQ^{-1}$，则(15)式与(11)式等价. 因此若(11)式与(12)式成立，则根据定理 1 有，广义离散系统(3)关于 $(\sigma,\varepsilon,d,R,N)$ 是有限时间有界的.

考虑如下正则广义离散系统

$$Ex(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Fw(k),$$
$$y(k)=Cx(k), \quad (16)$$

其中矩阵 $C\in R^{p\times n}$，并假设 C 是行满秩的. 设计输出反馈

$$u(k)=K_0y(k), \quad (17)$$

其中 $K_0\in R^{m\times p}$，得到闭环系统

$$Ex(k+1)=(A+BK_0C)x(k)+Fw(k). \quad (18)$$

我们要设计形如(17)式的输出反馈控制器，使得闭环系统(18)关于 $(\sigma,\varepsilon,d,R,N)$ 是有限时间有界的.

构造满秩方阵 $T=\begin{bmatrix} C \\ H \end{bmatrix}$，其中 $H\in R^{(n-p)\times n}$. 令 $\tilde{x}(k)=Tx(k)$，则广义离散系统(17)变为

$$TET^{-1}\tilde{x}(k+1)=TAT^{-1}\tilde{x}(k)+TBu(k)+TFw(k),\ y(k)=CT^{-1}\tilde{x}(k)=[I_p,0]\tilde{x}(k). \quad (19)$$

将(17)式代入(19)式，得

$$\bar{E}\tilde{x}(k+1)=(\bar{A}+\tilde{B}\bar{K})\tilde{x}(k)+\tilde{F}w(k), \quad (20)$$

其中 $\bar{E}=TET^{-1}$，$\bar{A}=TAT^{-1}$，$\tilde{B}=TB$，$\tilde{F}=TF$，$\bar{K}=K_0CT^{-1}=[K_0,0]$.

系统(20)与(3)式具有相同的形式，其区别在于控制器结构的不同.

定理 3 设广义离散系统(16)是因果的，若选择一个矩阵 $H\in R^{(n-p)\times n}$，使得 $T=\begin{bmatrix} C \\ H \end{bmatrix}$ 是可逆的，令 $\bar{E}=TET^{-1}$，$\bar{A}=TAT^{-1}$，$\tilde{B}=TB$，$\tilde{F}=TF$. 则系统(20)关于 $(\sigma,\varepsilon,d,R,N)$ 是有限时间有界的充分条件是，存在对称正定矩阵 $Q_{11}\in R^{p\times p}$，$Q_{12}\in R^{(n-p)\times(n-p)}$ 和 $Q_1\in R^{l\times l}$，矩阵 $L\in R^{m\times n}$ 以及标量 $\gamma\geqslant 1$，使得下面条件成立：

$$\begin{bmatrix} \gamma Q\bar{E}^{\mathrm{T}}Q^{-1}\bar{E}Q & 0 & (\bar{A}Q+\tilde{B}LS_1)^{\mathrm{T}} \\ 0 & \gamma Q_1 & \tilde{F}^{\mathrm{T}} \\ \bar{A}Q+\tilde{B}LS_1 & \tilde{F} & -Q \end{bmatrix}\leqslant 0, \quad (21)$$

$$\frac{\sigma}{\lambda_{\min}(\bar{Q})}+\lambda_{\max}(Q_1)d<\frac{\varepsilon}{\gamma^N\lambda_{\max}(\bar{Q}_1)}, \quad (22)$$

其中

$$Q=\begin{pmatrix}Q_{11} & 0\\ 0 & Q_{12}\end{pmatrix},S_1=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\bar{Q}=\bar{R}^{\frac{1}{2}}Q\bar{R}^{\frac{1}{2}},$$

$\bar{R}=T^{-T}RT^{-1}$.

进而,如果条件(21)和(22)存在可行解,则控制器的反馈增益 K_0 是由 $\bar{K}=LS_1Q^{-1}$ 的前 p 列构成的.

证明 由定理 1 的证明可知,若令 $\bar{K}=LSQ^{-1}$,则条件(21)和(22)保证系统(20)关于 $(\sigma,\varepsilon,d,\bar{R},N)$ 是有限时间有界的. 由 S_1 和 Q^{-1} 的选择可知

$$\bar{K}=LS_1Q^{-1}=L\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11}^{-1} & 0\\ 0 & Q_{12}^{-1}\end{pmatrix}=$$

$$L\begin{pmatrix}Q_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=[K_0,0].$$

另外,因为 $\tilde{x}(k)=Tx(k)$,则

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{R}\bar{E}\tilde{x}(k)=$$

$$(x^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}})(TET^{-1})^{\mathrm{T}}(T^{-T}RT^{-1})(TET^{-1})(Tx)=$$

$$x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k).$$

因此系统(16)关于 $(\sigma,\varepsilon,d,R,N)$ 是有限时间有界的.

参考文献:

[1] 沈艳军.一类线性离散时间系统有限时间控制问题[J].控制与决策,2008,23(1):107-109.

[2] Amato F,Ariola M,Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica,2001,37:1459-1463.

[3] Amato F,Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear system [J]. IEEE Transaction on Automatic Control,2005,50(5):724-729.

[4] Amato F,Ariola M,Dorato P. Finite-time stabilization via dynamic output feedback [J]. Automatica,2006,42:337-342.

[5] 杜富,梁家荣,张晶华.离散 T-S 模糊广义系统稳定性的一个新判别条件[J].广西科学,2010,17(2):111-113.

[6] 田森平,毛琳琳.带控制时滞广义系统的 PID 型迭代学习算法[J].控制工程,2012,19(1):65-68.

[7] 樊仲光,梁家荣,肖剑.广义系统的有限时间滑模变结构控制[J].信息与控制,2010,39(4):418-422.

[8] Wang X J,Chen Z Q,Wang H J,et al. Criteria on delay-dependent stability for linear descriptor system with delay[J].控制工程,2011,18(2):198-201.

[9] Yu S H,Ma Zi,Yang X H. Nonsmooth finite-time control of uncertain second-order nonlinear systems [J]. Journal of Control Theory and Applications,2007,5(2):171-176.

[10] Wang H,Han Z Z,Xie Q Y,et al. Finite-time chaos control via nonsingular terminal sliding mode control [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2009,14:2728-2733.

[11] 梁家荣,樊仲光.广义双线性系统的二阶终端滑模控制[J].控制与决策,2012,27(2):187-192.

[12] 袁薇,张庆灵,杜宝珠.不确定离散广义系统的 H_∞ 保成本控制[J].系统工程与电子技术,2007,29(1):121-124.

[13] Feng J,Wu Z,Sun J B. Finite 2 time control of linear singular systems with parametric uncertainties and disturbances[J]. Acta Automatica Sinica,2005,31(4):634-637.

(责任编辑:尹 闯)

大脑细胞寿命长达正常细胞的两倍

虽然人体内的大部分细胞正在不断的被替换,但是人类会一直拥有他们出生时几乎全部的神经细胞。意大利研究人员想要了解神经细胞是否能够比它们所属的生物体存活的更久,就从家鼠体内收集了神经细胞并且将它们植入到大约 60 只老鼠胎儿的大脑内。家鼠的寿命只有大约 18 个月,而老鼠的寿命是它们的两倍。研究人员让这些被植入家鼠神经细胞的老鼠渡过一生,在它们进入垂死状态而且不太可能活过 2 天的时候为它们实施了安乐死,然后对它们的大脑进行检查。结果发现,这些老鼠完全正常,在它们生命末期没有任何神经疾病的迹象。老鼠死亡的时候,从家鼠植入的神经细胞仍然存活,这就意味着有可能当这些细胞被植入到一个更长寿的物种当中后,它们就能够存活更久。这些发现表明我们的脑细胞不会在我们身体衰退前死亡,至少大脑细胞寿命长达正常细胞两倍。这项研究虽然是发现于老鼠而非人类,但是它们也能够对治疗变性疾病的神经细胞植入产生影响。

(据科学网)