DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.04.015

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(4):297～301

支付红利的双险种复合二项风险模型的 Gerber-Shiu 折现罚金函数*

The Gerber-Shiu Discounted Penalty Function in the Double Type-insurance Compound Binomial Risk Model with Randomized Decisions on Paying Dividend

方世祖，朱双喜
FANG Shi-zu，ZHU Shuang-xi

（**广西大学数学与信息科学学院，广西南宁** 530004）
（College of Mathematics and Information Science，Guangxi University，Nanning，Guangxi，530004，China）

摘要：对支付红利的双险种复合二项模型，考虑当盈余大于或等于一个给定的非负红利界时保险公司以一定概率给股东分红的情形，利用更新理论，得到该模型的 Gerber-Shiu 折现罚金函数满足的瑕疵更新方程及其渐近表达式，并给出破产概率、破产时破产赤字分布和破产前瞬时盈余的概率函数的递推公式及其渐近表达式.

关键词：双险种复合二项模型　Gerber-Shiu 折现罚金函数　瑕疵更新方程　渐近表达式　破产概率

中图法分类号：O211.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2012)04-0297-05

Abstract：In this paper，we study the double type-insurance compound binomial risk model. The insurer pays dividends to shareholders with a probability when the surplus is greater than or equal to a non-negative dividend-line. We derive the defective renewal equation and the asymptotic expressions for the Gerber-Shiu discounted penalty function by using the renewal theory. The recursion formulas and asymptotic expressions for the ruin probability，the probability function of the severity of ruin，and the surplus prior to the ruin time are obtained.

Key words：double type-insurance compound binomial risk model，Gerber-Shiu discounted penalty function，defective renewal equation，asymptotic expression，ruin probability

考虑经典复合二项风险模型：假设任意一个时间区间 $(n-1,n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 中，至多有一次索赔发生：用 $\xi_n=1$ 表示有一次索赔发生；用 $\xi_n=0$ 表示没有索赔发生. 假设 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且满足 $P(\xi_n=1)=p$，$P(\xi_n=0)=q$，$0<p<1$，$p+q=1$，若用 X_n 表示这个时间区间的索赔额，X_n 为取正整数值的随机变量，S_n 表示到 n 个时间区间末保险公司所支付的索赔总额，则有 $S_n=\xi_1X_1+\xi_2X_2+\cdots+\xi_nX_n$. 再假定 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 为独立同分布序列，而且在每个时间区间的开始时刻收取一个钱币单位的保费，这样保险公司在时刻 n 的盈余可表示为

$$U(n)=u+n-S_n,n=0,1,2,\cdots,\qquad(0.1)$$

其中 $U(0)=u$ 为初始盈余，其取值为非负整数.

而我们知道，在保险公司实际经营中，股东投资的目的就是为了能定期获得收益，而随着保险行业竞争的加剧，公司对股东分红多少显得很重要，况且投保人往往不只购买一种保险. 因此，对多险种的风险模型和带分红的风险模型[1～5]进行研究很有必要. 但是文献[1～3]和[5]仅讨论了对顾客分红的模型，文献[4]仅讨论了对股东和投保人都分红的模型. 本文讨论对股东分红且分红界为一般的非负整数的支付红利的双险种复合二项风险模型，得到了该模型的 Gerber-Shiu 折现罚金函数满足的瑕疵更新方程及其渐近表达式，并给出了破产概率、破产时破产赤字分布和破产前瞬时盈余的概率函数的递推公式及其渐近表达式.

收稿日期：2012-07-26

作者简介：方世祖(1964-)，男，副教授，主要从事随机过程及其在风险理论中的应用研究。

*国家自然科学基金项目(11061002)；广西教育厅科研项目(201010LX004)资助。

1 模型及其假设

在经典复合二项风险模型的基础上加入另一险种，其索赔总额过程也为复合二项过程，并考虑分红策略为：当盈余大于或等于非负红利界 a 时保险公司将以概率 p_0 给股东分红 1 个单位钱币. 同时为讨论方便假设保险公司单位时间内收取的保费为 1 单位钱币. 于是，盈余过程可表示为

$$U(n)=u+n-\sum_{k=1}^{n}\xi_k X_k-\sum_{k=1}^{n}\beta_k Y_k-\sum_{k=1}^{n}\eta_k I(U(k-1)\geqslant a),n=0,1,2,\cdots \quad (1.1)$$

其中

(1) $\{\xi_k,k=1,2,\cdots\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列，$\xi_k=1$ 表示险种 1 在时间区间$(k-1,k]$内发生一次索赔，$\xi_k=0$ 表示没有发生索赔，满足 $P(\xi_k=1)=p_1,P(\xi_k=0)=q_1,0<p_1<1,p_1+q_1=1$；$\{X_k,k=1,2,\cdots\}$ 是相互独立同分布取非正整数值的随机变量序列，$X_k=1$ 表示险种 1 在时间区间$(k-1,k]$内的索赔量，由于诸 X_k 同分布，我们用 X 泛指任一 X_k，记 X 的分布律为 $p_1(k)=P(X=k),k=1,2,\cdots$，分布函数为 $P_1(k)=1-\overline{P}_1(k)$，满足 $P_1(0)=0,\mu_1=EX<\infty$；

(2) $\{\beta_k,k=1,2,\cdots\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列，$\beta_k=1$ 表示险种 2 在时间区间$(k-1,k]$内发生一次索赔，$\beta_k=0$ 表示没有发生索赔，满足 $P(\beta_k=1)=p_2,P(\beta_k=0)=q_2,0<p_2<1,p_2+q_2=1$；$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$ 是相互独立同分布取非负整数值的随机变量序列，$Y_k=1$ 表示险种 2 在时间区间$(k-1,k]$内的索赔量，由于诸 Y_k 同分布，我们用 Y 泛指任一 Y_k，记 Y 的分布律为 $p_2(k)=P(Y=k),k=1,2,\cdots$，分布函数为 $P_2(k)=1-\overline{P}_2(k)$，满足 $P_2(0)=0,\mu_2=EY<\infty$；

(3) $Z_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_k I(U(k-1)\geqslant a)(n=0,1,2,\cdots)$ 表示 n 个单位时间内支付的红利总量，$\eta_k=1(k=1,2,\cdots)$ 表示时间区间$(k-1,k]$内支付一个单位红利，$\eta_k=0$ 表示不支付红利，设 $P(\eta_k=1)=q_0,P(\eta_k=0)=p_0,0<p_0<1,p_0+q_0=1,I(A)$ 表示集合 A 的示性函数，并约定 $Z_0=0$；

(4) 记 $F(k)=P_1(k)*P_2(k)(k=1,2,\cdots)$，表示 $P_1(k)$ 与 $P_2(k)$ 的卷积，记 $f(k)=Pr(X+Y=k)$ 表示两险种索赔额之和为 k 的概率，则 $F(k)$ 为 $X+Y$ 的分布函数，且有 $F(0)=0$.

此外，还假设$\{X_i,i\in N^+\},\{Y_i,i\in N^+\},\{\xi_i,i\in N^+\},\{\beta_i,i\in N^+\},\{\eta_i,i\in N^+\}$ 之间相互独立.

为保证公司能正常运行，还假定 $E[\xi_1X_1+\beta_1Y_1+\eta_1]=p_1\mu_1+p_2\mu_2+q_0<1$，即具有正的安全负荷 θ. 采用 Shiu[6] 对破产时刻的定义：$T=\inf\{n\geqslant 1:U(x)<0\}(\inf\phi=+\infty)$. 最终破产概率为 $\psi(u)=Pr(T<\infty\mid U(0)=u)$. Gerber-Shiu 折现罚金函数定义为

$$m_v(u)=E[v^T w(U_{T-},|U_T|)I(T<\infty)\mid U(0)=u], \quad (1.2)$$

其中 $|U_T|$ 为破产时赤字，U_{T-} 为破产前瞬时盈余，$\omega(x,y),x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 是一非负有界实函数，$0<v\leqslant 1$ 是折现因子，并且简记 $m(u)=m_v(u)$.

记 $X,Y,Y+X$ 的母函数分别为$\widetilde{p}_1(z)=E(z^X)$，$\widetilde{p}_2(z)=E(z^Y)$，$\widetilde{f}(z)=\widetilde{p}_1(z)\widetilde{p}_2(z)$，且满足条件：假设存在一个数 $z_{+\infty}>1$，满足当 $z\uparrow z_{+\infty}$ 时，有 $\widetilde{p}_1(z)\uparrow+\infty,\widetilde{p}_2(z)\uparrow+\infty(z_{+\infty}$ 可能是 $+\infty)$.

2 折现罚金函数的瑕疵更新方程

引理 2.1 对 $v\in(0,1]$，关于变量 z 的方程 $z-zvq_1q_2-v\widetilde{G}(z)=0$ 在$(vq_1q_2,1]$ 上有唯一解，记为 ρ_1，当 $v=1$ 时，有 $\rho_1=1$，其中 $\widetilde{G}(z)=p_1q_2\widetilde{p}_1(z)+q_1p_2\widetilde{p}_2(z)+p_1p_2\widetilde{f}(z)$.

证明 记 $l_1(z)=z-zvq_1q_2,l_2(z)=v\widetilde{G}(z)$，则在$[0,Z_\infty)$ 内有 $l_1(0)=-vq_1q_2<0=l_2(0)$，$l_1(vq_1q_2)=0<l_2(vq_1q_2),l_1(1)=1-vq_1q_2\geqslant v(1-q_1q_2)=l_2(1)$，同时有 $l_1{'}(z)\geqslant 0,l_2{'}(z)\geqslant 0,l_2{''}\geqslant 0$，即 $l_2(z)$ 在$[0,z_\infty)$ 内是单调递增并且下凸的函数，所以方程 $z-zvq_1q_2-v\widetilde{G}(z)=0$ 在$[0,z_\infty)$ 内至多存在两个实数根，且其中一个根在$(vq_1q_2,1]$ 上，记为 ρ_1. 特别地，当 $v=1$ 时有 $\rho_1=1$.

引理 2.2 对 $v\in(0,1]$，关于变量的方程 $z-zvq_1q_2q_0-vq_1q_2p_0-v\widetilde{H}(z)=0$ 在$(\frac{vq_1q_2p_0}{1-vq_1q_2q_0},1]$ 上有唯一解，记为 ρ，当 $v=1$ 时，有 $\rho=1$，其中

$$\widetilde{H}(z)=p_1q_2p_0\widetilde{p}_1(z)+p_2q_1p_0\widetilde{p}_2(z)+p_1p_2p_0\widetilde{f}(z)+z(p_1q_2q_0\widetilde{p}_1(z)+q_1p_2q_0\widetilde{p}_2(z)+p_1p_2q_0\widetilde{f}(z)).$$

证明 证明过程类似引理 2.1.

若关于变量 z 的方程 $z-zvq_1q_2q_0-vq_1q_2p_0-v\widetilde{H}(z)=0$ 在$[0,z_\infty)$ 内存在两个实根，那么其中一根定大于 1，记为 R，称之为调节系数. 以下假设调节系数 R 存在.

定理 2.1 $m(u)$ 满足如下的瑕疵更新方程

$$m(u)=v\{\sum_{k=0}^{u}m(u-k)\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho_1^{\,i-k-1}G(i)+\sum_{k=u+1}^{+\infty}\rho_1^{\,k-u-1}w_1(k)\},\forall\, 0\leqslant u<a, \quad (2.1)$$

$$m(u)=\frac{v}{1-vq_1q_2q_0}\{\sum_{k=0}^{u}m(u-k)\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)+\sum_{k=u+1}^{+\infty}\rho^{k-u-1}w(k)\},\forall u\geqslant a, \quad (2.2)$$

其中 $w(k)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}\omega(k,i-k)H(i+1)$，$w_1(k)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}\omega(k,i-k)G(i+1)$，$G(k)=p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)$，$H(k)=p_0G(k)+q_0G(k-1)$，且约定 $H(0)=0$.

证明 考虑 $0\leqslant u<a$ 和 $u\geqslant a$ 的情况，再根据全期望公式得

$$m(u)=v\{q_1q_2m(u+1)+\sum_{k=1}^{u+1}m(u+1-k)[p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)]+\sum_{k=u+2}^{+\infty}\omega(u+1,k-u-1)[p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)]\},\forall 0\leqslant u<a, \quad (2.3)$$

$$m(u)=v\{q_1q_2q_0m(u)+q_1q_2p_0m(u+1)+p_0\sum_{k=1}^{u+1}m(u+1-k)[p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)]+p_0\sum_{k=u+2}^{+\infty}\omega(u+1,k-u-1)[p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)]+q_0\sum_{k=1}^{u+1}m(u-k)[p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)]+q_0\sum_{k=u+1}^{+\infty}\omega(u+1,k-u)[p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)]\},\forall u\geqslant a. \quad (2.4)$$

记 $p_1q_2p_1(k)+q_1p_2p_2(k)+p_1p_2f(k)=G(k)$，$H(k)=p_0G(k)+q_0G(k-1)$，则(2.3)式，(2.4)式分别变为

$$m(u)=v\{q_1q_2m(u+1)+\sum_{k=1}^{u+1}m(u+1-k)G(k)+p_0\sum_{k=u+2}^{+\infty}\omega(u+1,k-u-1)G(k)\}, \quad (2.5)$$

$$m(u)=v\{q_1q_2q_0m(u)+q_1q_2p_0m(u+1)+p_0\sum_{k=1}^{u+1}m(u+1-k)G(k)+p_0\sum_{k=u+2}^{+\infty}\omega(u+1,k-u-1)G(k)+q_0\sum_{k=1}^{u}m(u-k)G(k)+q_0\sum_{k=u+1}^{+\infty}\omega(u+1,k-u)G(k)\}, \quad (2.6)$$

由 $\sum_{k=1}^{u+1}m(u+1-k)G(k)=\sum_{k=0}^{u}m(k)G(u+1-k)$，$\sum_{k=1}^{u}m(u-k)G(k)=\sum_{k=0}^{u}m(k)G(u-k)$，$\sum_{k=u+2}^{+\infty}\omega(u+1,k-u-1)G(k)=\sum_{k=u+1}^{+\infty}\omega(u+1,k-u-1)G(k+1)$，改写(2.5)式，(2.6)式得

$$m(u)=vq_1q_2m(u+1)+v\sum_{k=0}^{u}m(k)G(u+1-k)+vw_1(u+1), \quad (2.7)$$

$$m(u)=vq_1q_2q_0m(u)+vq_1q_2p_0m(u+1)+v\sum_{k=0}^{u}m(k)H(u+1-k)+vw(u+1), \quad (2.8)$$

其中 $w_1(u)=\sum_{k=u}^{+\infty}\omega(u,k-u+1)G(k+1)$，$w(u)=\sum_{k=u}^{+\infty}\omega(u,k-u+1)H(k+1)$.

整理得

$$vq_1q_2m(u+1)=m(u)-v\sum_{k=0}^{u}m(k)G(u+1-k)-vw_1(u+1), \quad (2.9)$$

$$vq_1q_2p_0m(u+1)=(1-vq_1q_2q_0)m(u)-v\sum_{k=0}^{u}m(k)H(u+1-k)-vw(u+1), \quad (2.10)$$

将(2.9)式，(2.10)式两端同时乘以 z^u 并对 u 从 0 到 $+\infty$ 求和得

$$vq_1q_2\sum_{u=0}^{+\infty}z^um(u+1)=\sum_{u=0}^{+\infty}z^um(u)-v\sum_{u=0}^{+\infty}z^u\sum_{k=0}^{u}m(k)G(u+1-k)-v\sum_{u=0}^{+\infty}z^uw_1(u+1),$$

$$vq_1q_2p_0\sum_{u=0}^{+\infty}z^um(u+1)=(1-vq_1q_2q_0)\sum_{u=0}^{+\infty}z^um(u)-v\sum_{u=0}^{+\infty}z^u\sum_{k=0}^{u}m(k)H(u+1-k)-v\sum_{u=0}^{+\infty}z^uw(u+1),$$

即

$$vq_1q_2\frac{\widetilde{m}(z)-m(0)}{z}=\widetilde{m}(z)-v\frac{\widetilde{m}(z)\widetilde{G}(z)}{z}-v\frac{\widetilde{w}_1(z)-w_1(0)}{z},$$

$$vq_1q_2p_0\frac{\widetilde{m}(z)-m(0)}{z}=(1-vq_1q_2q_0)\widetilde{m}(z)-v\frac{\widetilde{m}(z)\widetilde{H}(z)}{z}-v\frac{\widetilde{w}(z)-w(0)}{z},$$

其中 $\widetilde{m},\widetilde{w},\widetilde{w}_1,\widetilde{G},\widetilde{H}$ 分别为 m,w,w_1,G,H 的母函数. 整理以上两式得

$$[z-zvq_1q_2-v\widetilde{G}(z)]\widetilde{m}(z)=-vq_1q_2m(0)+v\widetilde{w}_1(z)-vw_1(0), \quad (2.11)$$

$$[z-zvq_1q_2q_0-vq_1q_2p_0-v\widetilde{H}(z)]\widetilde{m}(z)=-vq_1q_2p_0m(0)+v\widetilde{w}(z)-vw(0). \quad (2.12)$$

由引理 2.1，2.2 知 $\rho_1-vq_1q_2-v\widetilde{G}(\rho_1)=0$，$\rho-\rho vq_1q_2q_0-vq_1q_2p_0-v\widetilde{H}(\rho)=0$，再对上两式中 z 分别取 ρ_1,ρ，得 $v\widetilde{w}(\rho)=vq_1q_2p_0m(0)+vw(0)$，$v\widetilde{w}_1(\rho_1)=vq_1q_2m(0)+vw_1(0)$. 相应代入(2.11)式和(2.12)式得

$$(z-\rho_1)\widetilde{m}(z)=v[\widetilde{G}(z)-\widetilde{G}(\rho_1)]\widetilde{m}(z)+v[\widetilde{w}_1(z)-\widetilde{w}_1(\rho_1)],$$

$$(z-\rho)(1-vq_1q_2q_0)\widetilde{m}(z)=v[\widetilde{H}(z)-\widetilde{H}(\rho)]\widetilde{m}(z)+v[\widetilde{w}(z)-\widetilde{w}(\rho)],$$

即

$$\widetilde{m}(z)=v\{\frac{[\widetilde{G}(z)-\widetilde{G}(\rho_1)]\widetilde{m}(z)}{z-\rho_1}+\frac{\widetilde{w}_1(z)-\widetilde{w}_1(\rho_1)}{z-\rho_1}\},\qquad(2.13)$$

$$\widetilde{m}(z)=\frac{v}{1-vq_1q_2q_0}\{\frac{[\widetilde{H}(z)-\widetilde{H}(\rho)]\widetilde{m}(z)}{z-\rho}+\frac{\widetilde{w}(z)-\widetilde{w}(\rho)}{z-\rho}\}.\qquad(2.14)$$

由文献[1]知,对任意函数 $A(x),x\in N$,若其母函数为 $\widetilde{A}(x)$,则有

$$\frac{\widetilde{A}(t)-\widetilde{A}(z)}{(t-z)}=\sum_{u=0}^{+\infty}z^u\sum_{i=u+1}^{+\infty}t^{i-u-1}A(i),z\neq t.\qquad(2.15)$$

比较(2.13)式和(2.14)式两边 z^u 的系数得

$$m(u)=v\{\sum_{k=0}^{u}m(u-k)\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho_1^{i-k-1}G(i)+\sum_{k=u+1}^{+\infty}\rho_1^{k-u-1}w_1(k),\forall 0\leqslant u<a,$$

$$m(u)=\frac{v}{1-vq_1q_2q_0}\{\sum_{k=0}^{u}m(u-k)\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)+\sum_{k=u+1}^{+\infty}\rho^{k-u-1}w(k),\forall u\geqslant a,$$

而且

$$v\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}G(i)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}[p_1q_2\bar{P}_1(k)+q_1p_2\bar{P}_2(k)+q_1q_2\bar{F}(k)]=p_1q_2\mu_1+q_1p_2\mu_2+q_1q_2(\mu_1+\mu_2)<1,$$

$$\frac{1}{1-q_1q_2q_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)\leqslant\frac{v}{1-vq_1q_2q_0}\sum_{k=0}^{+\infty}[p_1p_0q_2\bar{P}_1(k)+p_2p_0q_1\bar{P}_2(k)+p_1p_0p_2\bar{F}(k)+p_1p_0q_2\bar{P}_1(k-1)+p_2q_0q_1\bar{P}_2(k-1)+p_1q_0p_2\bar{F}(k-1)]<\frac{1}{1-q_1q_0q_2}(\mu_1p_1+\mu_2p_2)<1.$$

于是定理2.1成立.

3 折现罚金函数的渐近表达式

定理3.1 若调节系数存在,则折现罚金函数 $m(u)$ 的渐近表达式为

$$m(u)\sim CR^u,u\to+\infty,\qquad(3.1)$$

其中 $C=\dfrac{\widetilde{w}(\rho)-\widetilde{w}(R)}{(\rho-R)\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)}$.

证明 将(2.2)式两端同时乘以 R^u. 得

$$R^um(u)=\frac{v}{1-vq_1q_2q_0}\{\sum_{k=0}^{u}R^{u-k}m(u-k)R^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)+R^u\sum_{k=u+1}^{+\infty}\rho^{k-u-1}w(k)\}.$$

若记

$$M(u)=R^um(u),B(k)=\frac{v}{1-vq_1q_2q_0}R^k\{\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i),W(u)=\frac{v}{1-vq_0q_1q_2}R^u\sum_{k=u+1}^{+\infty}\rho^{k-u-1}w(k),$$

则有

$$M(u)=\sum_{k=0}^{u}M(u-k)B(k)+W(u).\qquad(3.2)$$

利用(2.15)式和引理2.2,有

$$\sum_{k=0}^{+\infty}B(k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{v}{1-vq_0q_1q_2}R^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)=\frac{v}{1-vq_1q_2q_0}\cdot\frac{\widetilde{H}(\rho)-\widetilde{H}(R)}{\rho-R}=1.$$

于是(3.2)式是恰当更新方程.同时有

$$\sum_{u=0}^{+\infty}W(u)=\frac{v}{1-vq_0q_1q_2}\sum_{u=0}^{+\infty}R^u\sum_{k=u+1}^{+\infty}\rho^{k-u-1}w(k)=\frac{v}{1-vq_0q_1q_2}\cdot\frac{\widetilde{w}(\rho)-\widetilde{w}(R)}{\rho-R}.$$

由 $0<M=\sup\omega(x,y)\}<\infty$,易知 $\sum_{u=0}^{+\infty}W(u)<+\infty$.

又因为 $\sum_{k=0}^{+\infty}kB(k)=\frac{v}{1-vq_0q_1q_2}\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)\geqslant 1$.且

$$C=\frac{\sum_{u=0}^{+\infty}W(u)}{\sum_{k=0}^{+\infty}kB(k)}=\frac{\widetilde{w}(\rho)-\widetilde{w}(R)}{(\rho-R)\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}\rho^{i-k-1}H(i)}.$$

再由文献[2]中的引理4即得定理3.1结论.

4 折现罚金函数的应用举例

例4.1 设 $v=1,\omega(x_1,x_2)=1$,则 $m(u)=E[I(T<\infty)\mid U(0)=u]=\psi(u)$ 为最终破产概率,且有 $w_1(k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\omega(k,i-k+1)G(i+1)=\bar{G}(k),w(k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\omega(k,i-k+1)H(i+1)=\bar{H}(k)$.由(2.1)式和(2.2)式知,$\psi(u)$ 满足如下递推公式

$$\psi(u)=\sum_{k=0}^{u}\psi(u-k)\bar{G}(k)+\sum_{k=u+1}^{+\infty}\bar{G}(k),\forall 0\leqslant u<a,\qquad(4.1)$$

$$\psi(u)=\frac{1}{1-q_1q_2q_0}[\sum_{k=0}^{u}\psi(u-k)\bar{H}(k)+\sum_{k=u+1}^{+\infty}\bar{H}(k)],\forall u\geqslant a.\qquad(4.2)$$

由(4.1)式计算得

$$\psi(0)=\frac{p_1\mu_1+p_2\mu_2-(p_1q_2+p_2)}{q_1q_2},$$

若取 $p_2=0$,得 $\psi(0)=\frac{p_1\mu_1-p_1}{q_1}$ 为经典复合二项模型初始盈余为零时的最终破产概率[6]. 由定理 3.1 得,$\psi(u)$ 的渐近表达式为

$$\psi(u)\sim C_\psi R^u,u\to+\infty, \tag{4.3}$$

其中

$$C_\psi=\frac{\tilde{w}(1)-\tilde{w}(R)}{(1-R)\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}H(i)}=\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}R^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}\bar{H}(i)}{\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\bar{H}(k)}.$$

例 4.2 设 $v=1,\omega(x_1,x_2)=I(x_2\leqslant y),y\in N_+$,则 $m(u)=E[I(|U(T)|\leqslant y,T<\infty)|U(0)=u]=A(u,y)$ 为破产时破产赤字的分布函数,且有 $w_1(k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\omega(k,i-k+1)G(i+1)=\sum_{i=k}^{k-1+y}G(i+1)=\bar{G}(k)-\bar{G}(k-1+y)$,$w(k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\omega(k,i-k+1)H(i+1)=\sum_{i=k}^{k-1+y}H(i+1)=\bar{H}(k)-\bar{H}(k-1+y)$. 由(2.1)式和(2.2)式知,$A(u,y)$ 满足如下递推公式

$$A(u,y)=\sum_{k=0}^{u}A(u-k,y)\bar{G}(k)+\sum_{k=u+1}^{u+y}\bar{G}(k),\forall 0\leqslant u<a, \tag{4.4}$$

$$A(u,y)=\frac{1}{1-q_1q_2q_0}\left[\sum_{k=0}^{u}A(u-k,y)\bar{H}(k)+\sum_{k=u+1}^{u+y}\bar{H}(k)\right],\forall u\geqslant a. \tag{4.5}$$

由(4.4)式计算可得 $A(0,y)=\frac{1}{q_1q_2}\sum_{k=1}^{y}\bar{G}(k)$,若取 $p_2=0$,得 $A(0,y)=\frac{p_1}{q_1}\sum_{k=1}^{y}\bar{P}_1(k)$ 为经典复合二项模型初始盈余为零时的破产赤字的分布函数[6]. 由定理 3.1 知,$A(u,y)$ 的渐近表达式为

$$A(u,y)\sim C_A R^u,u\to+\infty, \tag{4.6}$$

其中

$$C_A=\frac{\tilde{w}(1)-\tilde{w}(R)}{(1-R)\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}H(i)}=\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}R^k\sum_{i=k+1}^{k-1+y}H(i+1)}{\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\bar{H}(k)}.$$

例 4.3 设 $v=1,\omega(x_1,x_2)=I(x_1=y),y\in N_+$,则 $m(u)=E[I(U(T-)=y,T<\infty)|U(0)=u]=f(u,y)$ 为破产前瞬时盈余的概率函数,且有 $w_1(k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\omega(k,i-k+1)G(i+1)=\sum_{i=k}^{+\infty}I(k=y)G(i+1)$,$w(k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\omega(k,i-k+1)H(i+1)=\sum_{i=k}^{+\infty}I(k=y)H(i+1)$. 由(2.1)式和(2.2)式,$f(u,y)$ 满足如下递推公式

$$f(u,y)=\sum_{k=0}^{u}f(u-k,y)\bar{G}(k)+I(u+1\leqslant y)\bar{G}(y),\forall 0\leqslant u<a, \tag{4.7}$$

$$f(u,y)=\frac{1}{1-q_1q_2q_0}\left[\sum_{k=0}^{u}f(u-k,y)\bar{H}(k)+I(u+1\leqslant y)\bar{H}(k)\right],\forall u\geqslant a.$$

由(4.7)式计算可得 $f(0,y)=\frac{1}{q_1q_2}\bar{G}(y)$,若取 $p_2=0$,得 $f(0,y)=\frac{p_1}{q_1}\bar{P}_1(y)$ 为经典复合二项模型初始盈余为零时的破产赤字的概率函数[6]. 由定理 3.1 知,$f(u,y)$ 的渐近表达式为

$$f(u,y)\sim C_f R^u,u\to+\infty,$$

其中

$$C_f=\frac{\tilde{w}(1)-\tilde{w}(R)}{(1-R)\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\sum_{i=k+1}^{+\infty}H(i)}=\frac{\frac{1-R^y}{1-R}\bar{H}(y)}{\sum_{k=0}^{+\infty}kR^k\bar{H}(k)}.$$

参考文献:

[1] Bao Z H. A note on the compound binomial model with randomized dividend strategy[J]. Applied Mathematics and Computation,2007,194:276-286.

[2] Tan J Y,Yang X Q. The compound binomial model with randaomized decisions on paying dividends[J]. Insurance:Mathmatics and Economic,2006,39:1-18.

[3] Landriault D. Randomized dividends in the compound binomial model with a general premium rate[J]. Scandinavian Actuarial Journal,2008(1):1-15.

[4] He L,Yang X Q. The compound binomial model with randomly paying dividends to shareholders and policyholders[J]. Insurance:Mathmatics and Economic,2010(46):443-449.

[5] 谭激扬,陈珊,杨向群. 支付红利的复合二项模型[J]. 经济数学,2008,25(2):111-117.

[6] 成世学,朱仁栋. 完全离散经典风险模型中的渐近解和 Lundberg 型不等式[J]. 高校应用数学学报,2001,16(3):348-358.

(责任编辑:尹 闯)