

关于仙人掌图的拉谱拉斯系数

On the Laplacian Coefficients of Cacti Graphs

宋天梅, 孙伟玲, 谭尚旺, 郭继明

SONG Tian-mei, SUN Wei-ling, TAN Shang-wang, GUO Ji-ming

(中国石油大学理学院, 山东青岛 266555)

(College of Science in China University of Petroleum, Qingdao, Shandong, 266555, China)

摘要:应用图的一些变换,在给定阶、圈数和匹配数以及给定阶和圈数的所有仙人掌图中确定了拉普拉斯系数最小的图,同时确定了给定阶、圈数和匹配数的仙人掌图中 Laplacian-like 能量最小的图.

关键词:拉普拉斯系数 Laplacian-like 能量 树 单圈图 仙人掌 匹配

中图法分类号:O157.5 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2012)03-0224-06

Abstract:By using some transforms of graphs, the graphs simultaneously minimizing all Laplacian coefficients c_k were determined among all cacti graphs with given order, cycle number and matching number. Also, the graphs simultaneously minimizing all Laplacian coefficients c_k were characterized among all cacti graphs with fixed order and cycle number. Moreover, some graphs with extremal Laplacian-like energy were identified among all cacti graphs.

Key words: Laplacian coefficient, Laplacian-like energy, tree, unicyclic graph, cactus, matching

本文只讨论简单无向的连通图. 令 $G = (V(G), E(G))$ 表示一个连通图, 其中 $n = o(G) = |V(G)|$, $e(G) = |E(G)|$. 若 $D(G)$ 和 $A(G)$ 分别表示 G 的顶点度对角矩阵和邻接矩阵, 则 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L(G) = D(G) - A(G)$, G 的拉普拉斯多项式定义为

$$\varphi(G, \lambda) = \det(\lambda I_n - L(G)) =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(G) \lambda^{n-k}.$$

由于 $L(G)$ 是半正定的实对称矩阵, 所以它的特征值都是非负实数, 记为

$$n \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n = 0.$$

由 Viette's 公式知, $c_k = \sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}) \geq 0$, 是一个 $n-1$ 次的特征多项式. 而且

$$c_0(G) = 1, c_1(G) = 2e(G), c_n(G) = 0, c_{n-1}(G) = n\tau(G),$$

其中 $\tau(G)$ 是 G 的生成树的个数^[1]. 特别地, 如果 G 是一棵树, 则 $c_{n-2}(G)$ 和 $c_{n-3}(G)$ 分别等于 G 的 Wiener 指标^[2] 和修改超 Wiener 指标^[3].

令 G 和 H 是两个 n 点连通图. 如果对所有的 $0 \leq k \leq n$, 都有 $c_k(G) \leq c_k(H)$, 则记为 $G \leq H$. 如果 $G < H$

且存在某个 $0 \leq k \leq n$, 使得 $c_k(G) \neq c_k(H)$, 则记为 $G < H$. 如果一个连通图的任意两个圈至多有一个公共点, 则称它是一个仙人掌图. 显然, 树和单圈图是特殊的仙人掌图. 图 G 的 Laplacian-like 能量^[4] $LEL(G)$ 定义为

$$LEL(G) = \sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \cdots + \sqrt{\lambda_{n-1}}.$$

文献[5]已经证明 $LEL(G)$ 和 Gutman 引进的图的能量有类似的特征, 其中图 G 的能量等于 $A(G)$ 的所有特征值绝对值的和. Stevanović^[6]建立了拉普拉斯多项式系数和 Laplacian-like 能量之间的一个关系, 而且 Ilić 等^[7]给出该关系的一个正确的证明:

设 G 和 H 是两个 n 阶连通图. 如果 $G \leq H$, 则 $LEL(G) \leq LEL(H)$; 如果 $G < H$, 则 $LEL(G) < LEL(H)$.

最近, 研究图的拉普拉斯多项式系数成为图论的热点问题之一. 文献[8~13]研究树的拉普拉斯多项式系数与图的一些同构不变量(比如顶点数、匹配数、悬挂点数、直径等)之间的关系. Stevanović 等^[14]确定了给定顶点数的单圈图中具有最大和最小拉普拉斯系数的图, Tan^[15]确定了给定顶点数和匹配数的单圈图中具有最小拉普拉斯系数和 Laplacian-like 能量的图, He 等^[16]确定了给定顶点数的双圈图中具有最小拉普拉斯系数的图系数, Tan^[17]确定了给定

收稿日期: 2012-03-29

作者简介: 宋天梅(1987-), 女, 硕士研究生, 主要从事图论的研究.

顶点数和匹配数的双圈图中具有最小拉普拉斯系数和 Laplacian-like 能量的一些图. 本文确定了给定阶、圈数和匹配数的仙人掌图的中拉普拉斯多项式系数和 Laplacian-like 能量最小的图, 推广了树和单圈图中的一些相关结论.

1 预备知识^[15,17]

对于图 G , 令 $N_G(v)$ 表示 G 中一个顶点 v 的邻接点的集合, $d_G(v)$ 表示 v 在 G 中的度. G 的 1 度顶点称为 G 的悬挂点, G 关联于悬挂点的边称为 G 的悬挂边. G 的一个路 $v_0v_1\cdots v_k$ 称为 G 在顶点 v_0 处长为 k 的悬挂路, 如果它满足

$$d_G(v_0) \geq 3, d_G(v_1) = d_G(v_2) = \cdots = d_G(v_{k-1}) = 2, d_G(v_k) = 1.$$

定义 1.1 令 uv' 是 n 阶连通图 G 的一个悬挂边, uv 是 G 中不包含在三角形内的一条边且满足 $d_G(u) \geq 3, d_G(v) \geq 3$. 令 G'_{uv} 是由 G 通过下面的方法得到的图: 删除边 uv 和点 u' ; 将 u 与 v 粘结并用 w 来表示新的点; 最后在 w 点上增加一个长为 2 的悬挂路 $ww'u'$. 称 G 到 G'_{uv} 的过程是图 G 在边 uv 的一个 α_1 变换.

引理 1.1 令 G 和 G'_{uv} 是定义 1.1 中定义的两个图. 如果 v 是割点, 则

$$c_k(G) \geq c_k(G'_{uv}), k = 0, 1, \cdots, n,$$

等号对所有的 k 成立, 当且仅当: uv 是割边时 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$, 否则 $k \in \{0, 1, n\}$.

注释 1.1 令 G 和 G'_{uv} 是定义 1.1 中定义的两个图, $M(G)$ 表示 G 的一个最大匹配, 则 $|M(G)| \leq |M(G'_{uv})| \leq |M(G)| + 1$.

定义 1.2 令 H, G_1, G_2 是 3 个连通图, v_1, v_2 是 H 的两个点. 把 H 的点 v_i 与 G_i 的一个点 \tilde{v}_i 合并 (得到的新的点仍用 v_i 来表示, $i = 1, 2$) 并且在 v_2 处增加一条悬挂边 v_2v 得到的 n 阶图记为 G . 令 z_1, z_2, \cdots, z_r 是 G_2 中点 $\tilde{v}_2 = v_2$ 的所有悬挂点. 记从 G 中删除边 $v_2z_1, v_2z_2, \cdots, v_2z_r$ 并且添加边 $v_1z_1, v_1z_2, \cdots, v_1z_r$ 得到的图记为 G' . 称 G 到 G' 的过程是图 G 由 v_2 到 v_1 的一个 α_2 变换.

引理 1.2 令 G 和 G' 是定义 1.2 中定义的两个图. 如果

$$N_H(v_2) - \{v_1\} \subseteq N_H(v_1) - \{v_2\}, o(G_2) \geq 2,$$

而且

$$o(G_2) \geq 3, \text{ 或 } o(G_1) = 2 \text{ 且 } N_H(v_2) - \{v_1\} \subset N_H(v_1) - \{v_2\},$$

则 $c_k(G) \geq c_k(G'), k = 0, 1, \cdots, n$, 并且等式成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

注释 1.2 如果 G' 中 v_1 点处存在悬挂边, 则 $|M(G)| = |M(G')|$.

定义 1.3 令 H, G_1, G_2 是 3 个连通图, v_1, v_2 是 H 的两个点. 把 H 的点 v_i 与 G_i 的一个点 \tilde{v}_i 合并 (得到的新的点仍用 v_i 来表示, $i = 1, 2$) 得到的 n 阶图记为 G . 令 z_1, z_2, \cdots, z_r 是 G_2 中点 $\tilde{v}_2 = v_2$ 的所有悬挂点, 从 G 中删除边 $v_2z_1, v_2z_2, \cdots, v_2z_r$ 并且添加边 $v_1z_1, v_1z_2, \cdots, v_1z_r$ 得到的图记为 G' . 称 G 到 G' 的过程是图 G 由 v_2 到 v_1 的一个 α_3 变换.

引理 1.3 令 G 和 G' 是定义 1.3 中定义的两个图. 如果 $N_H(v_2) - \{v_1\} \subseteq N_H(v_1) - \{v_2\}$, 而且 G_1 和 G_2 都至少有两个点, 则 $c_k(G) \geq c_k(G'), k = 0, 1, \cdots, n$, 并且等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

定义 1.4 令 G 是 n 阶连通图, uv 是 G 不包含在三角形中的一个非悬挂边. 再令 G'_{uv} 是按照下面方式得到的图: 从 G 中删除边 uv ; 将 u 和 v 粘结并用 w 表示新的点; 最后在 w 点上增加一个悬挂边 ww' . 则称 G 到 G'_{uv} 的过程是图 G 在边 uv 的一个 α_4 变换.

引理 1.4 令 G 和 G'_{uv} 是定义 1.4 中定义的两个图, E'_{uv} 表示除 uv 外所有与 u 关联的边的集合, 则

(1) 如果 $M(G) \cap E'_{uv} = \emptyset$ 或 $M(G) \cap E'_{uv} = \emptyset$, 则 $|M(G'_{uv})| = |M(G)|$.

(2) $c_k(G) \geq c_k(G'_{uv}), k = 0, 1, \cdots, n$, 并且等式成立当且仅当 uv 是割边时, $k \in \{0, 1, n-1, n\}$, 否则 $k \in \{0, 1, n\}$.

2 拉普拉斯系数最小的仙人掌图

引理 2.1 令 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 是两个降幂排列的实系数多项式. 如果它们的系数是正负交错的, 则 $f(\lambda)g(\lambda)$ 的系数也是正负交错的.

一个仙人掌图 G 的基 (用 \hat{G} 表示) 是与 G 有相同圈的最小连通子图. 显然, \hat{G} 是 G 的唯一一个不含悬挂边的子图, 并且可以通过在 \hat{G} 上添加适当的悬挂树得到 G . 令 u 是 G 的不在 \hat{G} 上的一个点, v 是 \hat{G} 上到 u 的距离最近的唯一点, 则称 v 是 u 在 \hat{G} 上的根, u 与 v 之间的距离称为 u 的高度.

$$G_1(s_0, t_0; s_{11}, t_{11}, s_{12}, t_{12}; \cdots; s_{r1}, t_{r1}, s_{r2}, t_{r2})$$

表示在 D_r (图 1) 的点 $u, v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{r1}, v_{r2}$ 上分别添加 $s_0, s_{11}, s_{12}, \cdots, s_{r1}, s_{r2}$ 个长度为 2 的悬挂路和 $t_0, t_{11}, t_{12}, \cdots, t_{r1}, t_{r2}$ 个悬挂边得到的图. 特别记 $G(n, i, r) = G_1^0$, 其中

$$G_1^i = G_1(i-r-1-s, n-2i+1; 0, 1, 0, 1; \cdots; 0, 1, 0, 1; 0, 0, 0, 0; \cdots; 0, 0, 0, 0).$$

$$f(p, q) = \lambda^3 - (n-i+p)\lambda^2 + (3n-3i+q)\lambda^2$$

- n.

$$g(k, l) = \lambda^2 - k\lambda + l.$$

直接计算得

$$\varphi(G_1^s, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-2i+r-s} g(3, 1)^{i-r-2} g(5, 3)^s (\lambda - 3)^{r-s} f(r-s+4, 3r-3s+4).$$

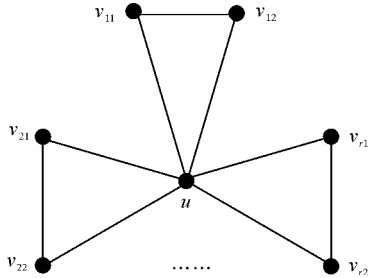


图 1 D_r
Fig. 1 D_r

引理 2.2 如果 $i \geq \max\{4, r+1\}$ 且 $n \geq 9$, 则 $G_1^0 < G_1^1 < G_1^2 < \dots < G_1^r$.

证明 对 $0 \leq s \leq r-1$, 由 $\varphi(G_1^s, \lambda)$ 表达式得

$$\varphi(G_1^{s+1}, \lambda) - \varphi(G_1^s, \lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{i-r-2} (\lambda - 1)^{n-2i+r-s-1} (\lambda^2 - 5\lambda + 3)^s \times [(n-i+r-s-4)\lambda^2 - (3n-3i+3r-3s-14)\lambda + (n-9)].$$

记 $\alpha = \varphi(G_1^{s+1}, \lambda) - \varphi(G_1^s, \lambda)$, 则 α 是 $n-2$ 次多项式. 再由 $0 \leq s \leq r-1$ 及已知条件知

$$n-i+r-s-4 \geq (i-4) + (r-s) \geq 1, 3n-3i+3r-3s-14 \geq 3(i+1)-14 \geq 1.$$

因此, 由引理 2.1 知多项式 α 的系数是正负交错的. 假设

$$\alpha = \sum_{j=0}^n (-1)^j b_j \lambda^{n-j}, \text{ 其中 } b_0 = b_1 = b_{n-1} = b_n = 0, \text{ 并且对 } 2 \leq j \leq n-2, b_j > 0, \text{ 则}$$

$$\varphi(G_1^{s+1}, \lambda) = \varphi(G_1^s, \lambda) + \alpha = \sum_{k=0}^n (-1)^k [c_k(G_1^s) + b_k] \lambda^{n-k},$$

于是 $c_k(G_1^{s+1}) = c_k(G_1^s) + b_k, k = 0, 1, \dots, n$. 这表明 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$ 时, $c_k(G_1^{s+1}) = c_k(G_1^s)$. 而 $2 \leq k \leq n-2$ 时, $c_k(G_1^{s+1}) < c_k(G_1^s)$. 因此, $G_1^s < G_1^{s+1}$.

下面总假设 $i \geq \max\{4, r+1\}$ 且 $n \geq 9, G$ 是 $C(n, i, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的一个极小元, $M(G)$ 是 G 中包含悬挂边尽可能多的一个最大匹配.

引理 2.3 在 G 中以 \hat{G} 上的点为根的树都是长度不超过 2 的悬挂路.

断言 1 G 的每个悬挂路的长度最多是 2.

假设 G 中的一条悬挂路 $v_0 v_1 \dots v_k$ 具有长度 $k \geq 3$, 则 $e = v_{k-3} v_{k-2}$ 不在 \hat{G} 上. 在边 e 上对 G 应用一个 α_4 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 G_e . 由 $M(G)$ 的假设知 $v_{k-1} v_k \in M(G)$, 于是 $v_{k-2} v_{k-1} \notin M(G)$. 记 $E_e^{v_{k-2}} = \{v_{k-2} v_{k-1}\}$, 则 $E_e^{v_{k-2}} \cap M(G) = \emptyset$. 于是由引理 1.

4(1) 得 $|M(G_e)| = |M(G)|$. 这表明 $G_e \in C(n, i, r)$, 且由引理 1.4(2) 得 $G_e < G$. 这与 G 的选取矛盾.

断言 2 G 中不在 \hat{G} 上的点的度最多为 2.

假设不在 \hat{G} 上的点中存在度大于 2 的点. 在这样的点中选取度数最大的一个点记为 u . 令 $uvw' \dots$ 是从 u 到它在 \hat{G} 的根的唯一路. 而由断言 1 知, 除 v 外, 与 u 邻接的其它点都在长度不超过 2 的悬挂路上.

情形 1 假设在 u 点存在一条悬挂边 uu' .

假设 $d_G(v) \geq 3$. 在边 uv 上对 G 进行一个 α_1 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 G' . 由注释 1.1 知 $|M(G')| = i, i+1$. 如果 $|M(G')| = i$, 则 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.1 得 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾. 如果 $|M(G')| = i+1$, 则在边 uvw' 上对 G 进行一次 α_4 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 W 并且 $|M(W)| = i$. 于是 $W \in C(n, i, r)$. 由引理 1.1 和引理 1.4 知 $W < G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

假设 $d_G(v) = 2$. 由 $M(G)$ 的假定, 可以设 $uu' \in M(G)$. 因此 $uv \notin M(G)$. 由于 vv' 不在圈上, 于是在边 vv' 上对 G 进行一个 α_4 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 $G_{vv'}$. 由于 $E_{vv'}^v \cap M(G) = \emptyset$, 于是由引理 1.4(1) 知 $|M(G_{vv'})| = |M(G)|$, 从而 $G_{vv'} \in C(n, i, r)$. 由引理 1.4(2) 知 $G_{vv'} < G$, 与 G 的选取矛盾.

情形 2 假设在 u 点没有悬挂边.

在边 uv 上对 G 进行一个 α_4 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 G_{uv} . 由 $M(G)$ 的假设知, 顶点 u 处所有长为 2 的悬挂路上的悬挂边都属于 $M(G)$. 由于 $E_{uv}^u \cap M(G) = \emptyset$, 于是由引理 1.4(1) 知 $|M(G_{uv})| = |M(G)|$, 从而 $G_{uv} \in C(n, i, r)$. 由引理 1.4(2) 知 $G_{uv} < G$, 与 G 的选取矛盾.

断言 3 G 中不在 \hat{G} 中的点的高度最多是 2.

设 u 是 G 中且不在 \hat{G} 上的点. 由断言 2 知 u 在某个悬挂路上, 由断言 1 知该悬挂路的长度最多是 2.

由断言 1 ~ 3 知, 引理 2.3 成立.

引理 2.4 $M(G)$ 不包含 \hat{G} 中的割边和圈长大于 3 的圈上的边.

证明 假设 $M(G)$ 包含 \hat{G} 的一个割边或圈长大于 3 的圈上的边, 并记这样的一个边为 $e = uv$. 在 e 上对 G 应用一个 α_4 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 G_e . 由 $e \in M(G)$ 知, $(E_e^u \cup E_e^v) \cap M(G) = \emptyset$, 从而由引理 1.4(1) 得 $|M(G_e)| = |M(G)|$. 因此, $G_e \in C(n, i, r)$. 由引理 1.4(2) 知 $G_e < G$, 与 G 的选取矛盾.

引理 2.5 G 的每个非悬挂点都被 $M(G)$ 饱和.

证明 假设存在 G 的一个非悬挂点 u 不被 $M(G)$ 饱和. 由 $M(G)$ 包含尽可能多的悬挂边的假设

知, u 不关联悬挂边.

情形 1 u 是 G 的一个割边的端点或 u 在 \hat{G} 的一个长度不小于 4 的圈 C 上.

记关联 u 的一个割边或圈 C 上的一个边为 e . 在 e 上对 G 进行一个 α_4 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 G_e . 既然 $E_e \cap M(G) = \emptyset$, 于是由引理 1.4(1) 知 $|M(G_e)| = |M(G)|$, 从而 $G_e \in C(n, i, r)$. 由引理 1.4(2) 知 $G_e < G$, 与 G 的选取矛盾.

情形 2 u 在 \hat{G} 的一个三角形上.

情形 2.1 假设 $d_G(u) \geq 3$.

由 $M(G)$ 包含尽可能多的悬挂边的假设和情形 1 的结论知, G 没有以 u 为根的树. 于是再由情形 1 的结论知, 包含 u 的圈都是三角形. 记这样的三角形为 $ua_1b_1, ua_2b_2, \dots, ua_t b_t$, 其中 $t \geq 2$. 既然 $i \geq r+1 \geq t+1$, 于是 $n \geq 2t+2$. 这表明存在 $a_1, b_1, \dots, a_t, b_t$ 中的点 (比如 a_1) 满足 $d_G(a_1) \geq 3$. 在定义 1.3 中取 $H = ua_1a_2$, 对 G 进行一个从 u 到 a_1 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

情形 2.2 假设 $d_G(u) = 2$.

记包含 u 的唯一三角形为 uab . 由于 $n \geq 9$, 于是 a 和 b 中至少有一个点的度不小于 3. 不失一般性, 假设 $d_G(a) \geq 3$.

假设 $d_G(b) \geq 3$. 在定义 1.3 中取 $H = uab$, 对 G 进行一个从 b 到 a 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

假设 $d_G(b) = 2$. 如果 $ab \notin M(G)$, 则 $\{ub\} \cup M(G)$ 是 G 的一个匹配, 与 $M(G)$ 是 G 的最大匹配矛盾. 因此, $ab \in M(G)$. 令 $M' = (M(G) - \{ab\}) \cup \{ub\}$, 则 M' 是与 $M(G)$ 包含相同悬挂边的最大匹配并且 a 不被 M' 饱和, 此时情形 2.2 变成了情形 2.1.

引理 2.6 \hat{G} 中每个圈的长度为 3.

证明 假设 \hat{G} 中存在一个圈 $C = v_1v_2 \dots v_l v_1$, 具有长度 $l \geq 4$. 由引理 2.3 知, 以 C 的顶点为根的树都是悬挂边或长为 2 的悬挂路. 由引理 2.4 和引理 2.5 知, C 的边都不在 $M(G)$ 中并且 C 的每个点都被 $M(G)$ 饱和. 因此, 结合 $M(G)$ 包含尽可能多悬挂边的假设, 对每个 $1 \leq j \leq l$, 容易发现 v_j 处有悬挂边或包含 v_j 的三角形.

情形 1 假设某个顶点 $v_j (1 \leq j \leq l)$ 处有悬挂边.

不失一般性, 假设 v_1 处有一个悬挂边 v_1v 且 $v_1v \in M(G)$. 既然 v_2 是 G 的一个割点, 于是在边 v_1v_2 上对 G 进行一个 α_1 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 G' . 由于 $(M(G) - \{v_1v\}) \cup \{w'v\}$ 是 G' 的一个最

大匹配, 于是 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.1 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

情形 2 假设 v_1, v_2, \dots, v_l 处都没有悬挂边.

此时, v_1 处至少有一个三角形. 设 G 中包含 v_1 的三角形为 $v_1a_1b_1, v_1a_2b_2, \dots, v_1a_t b_t$. 既然 $M(G)$ 不包含 C 的边, v_1 被 $M(G)$ 饱和且 v_1 处没有悬挂边, 于是不妨假设 $v_1a_1 \in M(G)$. 如果 $a_1, b_1, \dots, a_t, b_t$ 中存在一个点 (比如 a_1) 满足 $d_G(a_1) \geq 3$, 则在定义 1.3 中取 $H = v_1a_1b_1$, 对 G 进行一个从 v_1 到 a_1 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾. 如果 $a_1, b_1, \dots, a_t, b_t$ 的度都是 2, 则 $M' = (M(G) - \{v_1a_1\}) \cup \{a_1b_1\}$ 是一个与 $M(G)$ 具有相同悬挂边的 G 最大匹配, 并且 v_1 不被 M' 饱和. 在 $e = v_1v_2$ 上对 G 进行一个 α_4 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 $G_e \in C(n, i, r)$. 由引理 1.4(2) 知 $G_e < G$, 与 G 的选取矛盾.

引理 2.7 \hat{G} 的 r 个圈有一个公共顶点.

证明 由引理 2.4 ~ 2.6 知, $M(G)$ 不包含 \hat{G} 的割边 (如果 \hat{G} 存在割边), \hat{G} 的每个点被 $M(G)$ 饱和并且 \hat{G} 的每个圈都是三角形. 假设 \hat{G} 中存在两个三角形没有公共顶点. 并在这样的三角形中选取距离最近的两个, 分别记为 $u_1v_1v_2$ 和 $u_lw_1w_2$. 令 $P = u_1u_2 \dots u_l$ 是 \hat{G} 中连接这两个三角形的最短路, 则 $l \geq 2$.

情形 1 P 的某个边 $u_ju_{j+1} (1 \leq j \leq l-1)$ 是 G 的割边.

假设 u_j 或 u_{j+1} 处有悬挂边. 不失一般性, 假设 u_j 处有一个悬挂边 u_ju 并且 $u_ju \in M(G)$. 既然 u_j 是 G 的一个割点, 于是在边 $e = u_ju_{j+1}$ 上对 G 进行一个 α_1 变换, 得到一个 n 阶 r 个圈的仙人掌图 G' . 由于 $(M(G) - \{u_ju\}) \cup \{w'u\}$ 是 G' 的一个最大匹配, 于是 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.1 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

假设 u_j 和 u_{j+1} 处都没有悬挂边. 既然 u_j 和 u_{j+1} 都被 $M(G)$ 饱和且 $M(G)$ 不包含 \hat{G} 的割边, 于是 u_j 和 u_{j+1} 处都至少有一个三角形. 因此, 从 $u_1v_1v_2$ 和 $u_lw_1w_2$ 的选取知 $l = 2$. 不失一般性, 假设 $u_1v_1 \in M(G)$, 则 $u_1u_2, u_1v_2, v_1v_2 \notin M(G)$. 既然 v_2 被 $M(G)$ 饱和, 于是 $d_G(v_2) \geq 3$. 在定义 1.3 中取 $H = u_1v_1v_2$, 对 G 进行一个从 u_1 到 v_2 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

情形 2 P 的每个边都不是 G 的割边. 记包含边 u_1u_2 的三角形为 u_1u_2u' .

如果 $u_1v_1, u_1v_2 \notin M(G)$, 则在定义 1.3 中取 $H = u_1u_2u'$, 对 G 进行一个从 u_2 到 u_1 的 α_3 变换, 得到一

个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知, $G' < G$, 这与 G 的选取矛盾. 不妨假设 $u_1 v_1 \in M(G)$, 则 $u_1 u_2, u_1 u', u_1 v_2, v_1 v_2 \notin M(G)$. 既然 v_2 被 $M(G)$ 饱和, 于是 $d_G(v_2) \geq 3$. 在定义 1.3 中取 $H = u_1 v_1 v_2$, 对 G 进行一个从 u_1 到 v_2 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

引理 2.8 $G \cong G(n, i, r)$.

证明 由引理 2.3, 2.6 和 2.7 知, 存在非负整数 $s_0, t_0, s_{j_1}, s_{j_2}, t_{j_1}, t_{j_2} (1 \leq j \leq r)$, 使得

$$G \cong G_1(s_0, t_0; s_{11}, t_{11}, s_{12}, t_{12}; \dots; s_{r1}, t_{r1}, s_{r2}, t_{r2}) \in C(n, i, r).$$

当 $0 \leq r \leq 1$ 时, G 是树或单圈图, 此时由文献 [11, 15] 知 $G \cong G(n, i, r)$. 因此, 设 $r \geq 2, \delta = \sum_{j=1}^r (s_{j_1} + s_{j_2} + t_{j_1} + t_{j_2}) \neq 0$.

情形 1 假设存在 $1 \leq k \leq r$, 使 $s_{k1} + s_{k2} \neq 0$. 不妨假设 $s_{k1} \geq s_{k2}$.

如果 $t_{k1} \neq 0$, 则对 G 进行一个从 v_{k1} 到 u 的 α_2 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 如果 $t_{k1} = 0$, 则对 G 进行一个从 v_{k1} 到 u 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.2 和引理 1.3 知, 总有 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

情形 2 假设对所有的 $1 \leq j \leq r$, 都有 $s_{j1} + s_{j2} = 0$. 不失一般性, 假设对所有的 $1 \leq j \leq r$, 都有 $t_{j1} \geq t_{j2}$.

情形 2.1 假设 u 被 $M(G)$ 饱和.

如果存在一个 $1 \leq k \leq r$, 使 $t_{k1} \geq 2$, 则对 G 进行一个从 v_{k1} 到 u 的 α_2 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.2 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

如果存在一个 $1 \leq k \leq r$, 使 $t_{k1} = 1$ 且 $t_{k2} = 0$, 则对 G 进行一个从 v_{k1} 到 u 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知 $G' < G$, 与 G 的选取矛盾.

上面讨论表明, 存在一个正整数 $1 \leq s \leq r$, 使得

$$t_{11} = t_{12} = \dots = t_{s1} = t_{s2} = 1, t_{s+11} = t_{s+22} = \dots = t_{r1} = t_{r2} = 0,$$

即 $G \cong G_1^s$. 由引理 2.2 知 $G_1^{-1} < G_1^s \cong G$. 而 $G_1^{-1} \in C(n, i, r)$, 于是与 G 的选取矛盾.

情形 2.2 假设 u 不被 $M(G)$ 饱和.

由假设知, 一定存在一个 $1 \leq k \leq r$, 使 $t_{k1} \neq 0$. 对 G 进行一个从 v_{k1} 到 u 的 α_3 变换, 得到一个仙人掌图 $G' \in C(n, i, r)$. 由引理 1.3 知 $G' < G$, 这与 G 的选取矛盾.

由上面讨论知 $\delta = 0$. 因此, $G \cong G_1(s_0, t_0; \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{4r}) \cong G(n, i, r)$.

引理 2.9^[18] 如果 $i \leq r, Q \in G(n, i, r)$, 则 $i = r, n = 2r + 1$, Q 的每个圈都是三角形, 而且 Q 的每个边都在某个三角形上.

引理 2.10 如果 $i \leq r$, 则 D_r 是 $C(n, i, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的唯一最小元.

证明 设 $Q \in C(n, i, r)$ 是偏序关系 $<$ 下的一个极小元, 则由引理 2.9 知, $i = r, n = 2r + 1$, Q 的每个圈都是三角形并且 Q 的每个边都在某个三角形上. 如果 Q 中存在两个没有公共点的三角形. 应用类似引理 2.7 情形 2 的证明方法, 得到一个仙人掌图 $Q' \in C(n, i, r)$, 使得 $Q' < Q$, 与 Q 的假设矛盾. 由于 D_r 是 $C(n, i, r)$ 中两两三角形都有公共点的唯一图, 于是 $Q \cong D_r$.

由引理 2.8 和引理 2.10, 得到如下结论.

定理 2.1(1) 如果 $i \geq \max\{4, r + 1\}$ 且 $n \geq 9$, 则 $G(n, i, r)$ 是 $C(n, i, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的唯一最小元.

(2) 如果 $1 \leq i \leq r$, 则 D_r 是 $C(n, i, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的唯一最小元.

推论 2.1(1) 如果 $i \geq \max\{4, r + 1\}$ 且 $n \geq 9$, 则对 $G \in C(n, i, r)$ 都有

$$\text{LEL}(G) \geq \text{LEL}(G(n, i, r)),$$

等号成立当且仅当 $G \cong C(n, i, r)$.

(2) 如果 $1 \leq i \leq r$, 则对 $G \in C(n, i, r)$ 都有 $\text{LEL}(G) \geq \text{LEL}(D_r)$, 等号成立当且仅当 $G \cong D_r$.

推论 2.2 设 $r \geq 1$ 且 $n \geq 9$.

(1) 若 $n \neq 2r + 1$, 则 $G(n, r + 1, r)$ 是 $C(n, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的唯一最小元.

(2) 若 $n = 2r + 1$, 则 D_r 是 $C(n, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的唯一最小元.

证明(1) 令 $Q \in C(n, r)$ 并且记 Q 的匹配数为 i , 则由 $n \neq 2r + 1$ 和引理 2.9 知 $i \geq r + 1$. 由定理 2.1(1) 知

$$c_k(Q) \geq c_k(G(n, i, r)), k = 0, 1, \dots, n.$$

如果 $i \geq r + 2$, 则对 $G(n, i, r)$ 中长为 2 的悬挂路上的非悬挂边反复应用 α_4 变换, 直到所有长为 2 的悬挂路都变成悬挂边为止, 最后得到的图为 $G(n, r + 1, r)$. 由引理 1.4(2) 得 $G(n, r + 1, r) < G(n, i, r)$.

由上面讨论知, 对所有的 $k = 0, 1, \dots, n, c_k(Q) \geq c_k(G(n, r + 1, r))$, 并且等号对所有的 $k = 0, 1, \dots, n$ 成立, 当且仅当 $Q \cong G(n, r + 1, r)$. 因此, $G(n, r + 1, r)$ 是 $C(n, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的唯一最小元.

(2) 令 $Q \in C(n, r)$ 并且记 Q 的匹配数为 i . 如果 $i \geq r + 1$, 则 $n \geq 2i \geq 2r + 2$, 与 $n = 2r + 1$ 矛盾. 因此 $i \leq r$. 由引理 2.9 知 $i = r$, 从而 $C(n, r) = C(n, i, r)$.

r). 于是由定理 2.1(2) 知, D_r 是 $C(n, r)$ 在偏序关系 $<$ 下的唯一最小元.

推论 2.3 设 $r \geq 1$ 且 $n \geq 9$.

(1) 如果 $n \neq 2r + 1$, 则对 $G \in C(n, r)$ 都有 $LEL(G) \geq LEL(G(n, r + 1, r))$, 等号成立当且仅当 $G \cong G(n, r + 1, r)$.

(2) 如果 $n = 2r + 1$, 则对 $G \in C(n, r)$ 都有 $LEL(G) \geq LEL(D_r)$, 等号成立当且仅当 $G \cong D_r$.

参考文献:

[1] Merris R. A survey of graph Laplacians[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1995, 39: 19-31.
[2] Dobrynin A, Entringer R, Gutman I. Wiener index of trees: theory and applications [J]. Acta Appl Math, 2001, 66: 211-249.
[3] Gutman I. A property of the wiener number and its modifications[J]. Indian J Chem, 1997, 36A: 128-132.
[4] Liu J, Liu B. A Laplacian-energy-like invariant of a graph [J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2008, 59: 397-419.
[5] Gutman I. The energy of a graph[J]. Ber Math Statist Sect Forschungsz Graz, 1978, 103: 1-22.
[6] Stevanović D. Laplacian-like energy of trees[J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2009, 61: 407-417.
[7] Ilić A, Krtinić D, Ilić M. On Laplacian-like energy of trees[J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2010, 64: 111-122.
[8] Mohar B. On the Laplacian coefficients of acyclic graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2007, 722: 736-741.

[9] Zhang X D, Lv X P, Chen Y H. Ordering trees by the Laplacian coefficients[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431: 2414-2424.
[10] Ilić A. On the ordering of trees by the Laplacian coefficients[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431: 2203-2212.
[11] Ilić A. Trees with minimal Laplacian coefficients[J]. Comp Math Appl, 2010, 59: 2776-2783.
[12] Ilić A, Ilić M. Laplacian coefficients of trees with given number of leaves or vertices of degree two[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431: 2195-2202.
[13] Lin W, Yan W G. Laplacian coefficients of trees with given bipartition[J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435: 152-162.
[14] Stevanović D, Ilić A. On the Laplacian coefficients of unicyclic graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430: 2290-2300.
[15] Tan S W. On the Laplacian coefficients of unicyclic graphs with prescribed matching number[J]. Discrete Math, 2011, 311: 3410-3412.
[16] He C X, Shan H Y. On the Laplacian coefficients of unicyclic graphs [J]. Discrete Math, 2010, 310: 582-594.
[17] Tan S W. On the Laplacian coefficients and Laplacian-like energy of bicyclic graphs[J/OL]. DOI: 10.1080/03081087.2011.643473.
[18] 谭尚旺. 两类图的谱半径[J]. 石油大学学报, 2004, 28(2): 129-133.

(责任编辑: 尹 闯)

我国发现迄今最早真双子叶被子植物化石

最近在我国辽宁凌源早白垩世义县组中部首次发现迄今最早的真双子叶被子植物大化石, 时代距今约 1.24 亿年。这一古老的真双子叶植物非常接近现生的毛茛科, 是我国乃至全球迄今最早的与现生被子植物有直接系统演化联系的被子植物化石。真双子叶植物(Eudicots)是被子植物的主要分支之一, 以具有三沟型花粉为特征, 全世界现有 25 万种左右, 约占整个被子植物的 75%; 人们平时常见的槭树、柞树以及毛茛科等都是真双子叶植物。本次发现的真双子叶植物化石保存完好, 其簇生的单叶呈三裂状、基部中脉为复出掌状脉, 二级脉羽状, 扁平的花托顶生在伸长的花梗上, 其上着生 5 枚狭长形的假合生心皮(果), 上述形态特征与现生的毛茛科植物基本一致。由于早期真双子叶植物的化石十分罕见, 以往科学界对真双子叶植物的早期类群及其祖先所知甚少。本次发现的真双子叶化石是有关我国早期真双子叶植物化石的首次报道, 它填补了我国早白垩世早中期真双子叶植物大化石记录的空白。真双子叶化石的发现不仅丰富了我国著名的“热河生物群”的早期被子植物的组成内容, 而且进一步证实了真双子叶植物的基部分支在距今至少 1.24 亿年前的早白垩世已经出现, 这对深入研究被子植物的早期分异及多样性的发生等具有十分重要的意义。

(据科学时报)