DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.03.001

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(3):205～208

基于相对优势度的直觉模糊多属性决策方法*

Multi-attribute Fuzzy Decision-making Method with Intuitionistic Fuzzy Sets Based on Relative Superiority

王中兴,唐芝兰,邵翠丽
WANG Zhong-xing,TANG Zhi-lan,SHAO Cui-li

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004,China)

摘要:把区间数的相对优势度概念推广到直觉模糊数,再根据直觉模糊数两两比较的相对优势度构建模糊互补判断矩阵,提出一种直觉模糊数的排序方法,并将此排序方法应用到直觉模糊多属性决策中,得到一种基于相对优势度的直觉模糊数多属性决策方法.

关键词:相对优势度　直觉模糊数　多属性决策
中图法分类号:C934　文献标识码:A　文章编号:1005-9164(2012)03-0205-04

Abstract:The concept of relative superiority of interval numbers was extended to intuitionistic fuzzy numbers. The fuzzy complementary judgment matrix was given, and then a ranking method of intuitionistic fuzzy numbers was presented,based on the relative superiority matrix for the binary comparison of intuitionistic fuzzy numbers. In the following stage, this method was applied to multi-attribute fuzzy decision-making with intuitionistic fuzzy numbers, and a multi-criteria fuzzy decision-making method with intuitionistic fuzzy sets was given based on relative superiority.

Key words:relative superiority,intuitionistic fuzzy numbers,multi-criteria decision-making

为处理现实生活中一些不确定或无法精确描述的信息,Zadeh 提出了模糊集理论,他将数学的理论与应用推广到模糊现象的领域. 1986 年,Atanassov[1] 在此基础上又提出直觉模糊集理论. 由于直觉模糊集同时考虑隶属度、非隶属度和犹豫度三方面的信息,能更细腻地刻画和描述事物的模糊性,因此,在管理决策等领域得到了广泛的应用.

在直觉模糊多属性决策问题中,其决策信息由直觉模糊数给出,因此直觉模糊数的排序指标一直是直觉模糊多属性决策研究中的一个重要环节. 目前对于直觉模糊数的比较大多以评分函数为排序指标,例如文献[2]定义直觉模糊数的得分函数,文献[3]分析文献[2]的不足,补充提出精确函数. 此后许多国内外学者研究并提出了一系列的评分函数[4～6],文献[7]将得分函数与精确函数相结合,给出了一种较完善直觉模糊数的排序方法. 除了评分函数外,文献[8,9]基于区间数的可能度排序方法,将可能度法推广到直觉模糊集上,利用可能度矩阵对直觉模糊数进行排序. 虽然最常用的区间数比较排序方法仍然是基于模糊互补判断矩阵的可能度法[10],但是可能度在用于区间数排序时有些粗糙,可能会造成一些信息的丢失从而使排序不够精确. 为了克服这一缺陷,文献[11]提出一种新的比较区间数优劣的相对优势度方法,但是文献[11]定义的相对优势度只考虑区间数的端点信息. 因此文献[12]在其基础上,充分利用两个区间数每一对对应点的信息定义改进了区间数的相对优势度.

本文将文献[12]中提出的区间数的相对优势度推广到直觉模糊数,给出直觉模糊数的相对优势度概念,并以此作为直觉模糊数的排序指标提出直觉模糊数的一种简单排序方法(这种方法在一定程度上解决了可能度法的失效问题). 最后,将该排序方法应用到

收稿日期:2011-11-17
修回日期:2012-03-17
作者简介:王中兴(1962-),男,教授,主要从事优化与决策研究。
*国家自然科学基金项目(10761001),广西自然科学基金项目(0991029)资助。

模糊多属性决策领域，得到一种基于相对优势度的直觉模糊多属性决策方法，并进行实例分析.

1 直觉模糊数的基本概念和排序方法

1.1 基本概念

定义 1.1[1] 设 X 为一个非空集合，X 上的一个直觉模糊集定义为

$$A=\{(x,\mu_A(x),\nu_A(x))\mid x\in X\},$$

其中 $\mu_A:X\to[0,1]$，$\nu_A:X\to[0,1]$ 分别为 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度，并且对任意的 $x\in X$，有 $\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$.

X 上的直觉模糊集全体构成的集合记为 $\mathrm{IFS}(X)$. 为方便起见，记 $a=(\mu_a,\nu_b)$ 为直觉模糊数[7]，其中 $\mu_a\in[0,1]$，$\nu_a\in[0,1]$，$\mu_a+\nu_a\leqslant 1$，且设 Θ 为全体直觉模糊数的全体.

设 $A\in\mathrm{IFS}(X)$，则称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 为 X 中元素 x 属于 A 的直觉指标，它表示元素 x 属于 A 的不确定程度. 显然，当 $\pi_A(x)=0$ 时，直觉模糊集退化为通常的 Zadeh 模糊集，可以写为 $\{(x,\mu_A(x),1-\mu_A(x))\mid x\in X\}$. 因此，Zadeh 模糊集是直觉模糊集的一个特例.

定义 1.2[13] 设 $a=(\mu_a,\nu_a)$，$a_1=(\mu_{a_1},\nu_{a_1})$ 和 $a_2=(\mu_{a_2},\nu_{a_2})$ 为直觉模糊数，则

(1) $\bar{a}=(\nu_a,\mu_a)$；

(2) $a_1\cap a_2=(\min\{\mu_{a_1},\mu_{a_2}\},\max\{\nu_{a_1},\nu_{a_2}\})$；

(3) $a_1\cup a_2=(\max\{\mu_{a_1},\mu_{a_2}\},\min\{\nu_{a_1},\nu_{a_2}\})$；

(4) $a_1\oplus a_2=(\mu_{a_1}+\mu_{a_2}-\mu_{a_1}\mu_{a_2},\nu_{a_1}\nu_{a_2})$；

(5) $a_1\otimes a_2=(\mu_{a_1}\mu_{a_2},\nu_{a_1}+\nu_{a_2}-\nu_{a_1}\nu_{a_2})$；

(6) $\lambda a=(1-(1-\mu_a)^\lambda,\nu_a^\lambda)$，$\lambda>0$；

(7) $a^\lambda=(\mu_a^\lambda,1-(1-\nu_a)^\lambda)$，$\lambda>0$.

定义 1.3[14] 设 $a_i=(\mu_i,\nu_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊数，且设 $\mathrm{IFWA}:\Theta^n\to\Theta$，若

$$\mathrm{IFWA}_w(a_1,a_2,\cdots,a_n)=w_1a_1\oplus w_2a_2\oplus\cdots\oplus w_na_n=(1-\prod_{i=1}^n(1-\mu_{a_i})^{w_i},\prod_{i=1}^n\nu_{a_i}^{w_i}),\quad(1.1)$$

则称 IFWA 为直觉模糊加权平均算子，其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量，$w_i\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^n w_i=1$.

1.2 排序方法

定义 1.4[10] 设 $a=[a^L,a^U]$，$b=[b^L,b^U]$ 为两个区间数，且记 $l(a)=a^U-a^L$，$l(b)=b^U-b^L$，则称

$$p(a\geqslant b)=\frac{\min\{l(a)+l(b),\max\{a^U-b^L,0\}\}}{l(a)+l(b)}\quad(1.2)$$

为 $a\geqslant b$ 的可能度.

为了引进改进的区间数相对优势度，文献[12]利 S 型函数

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1},x\in(-\infty,+\infty)$$

引入区间数排序的相对优势度.

定义 1.5[12] 设 $a=[a^L,a^U]$，$b=[b^L,b^U)]$ 为两个区间数，且对任意 $\lambda\in[0,1]$，记 $m_\lambda(a)=a^L+\lambda l(a)$，$m_\lambda(b)=b^L+\lambda l(b)$ 分别为区间数 a 和 b 的 λ 分点，则称

$$q(a>b)=\int_0^1 f(m_\lambda(a)-m_\lambda(b))\mathrm{d}\lambda\quad(1.3)$$

为区间数 a 与 b 相比较时 a 相对优于 b 的程度，简称相对优势度. 经计算可得相对优势度的表达式

$$q(a>b)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{b^L-a^L}},l(a)=l(b),\\[2ex]\dfrac{1}{l(a)-l(b)}\ln\dfrac{e^{a^U-b^U}+1}{e^{a^L-b^L}+1},l(a)\neq l(b).\end{cases}\quad(1.4)$$

显然，对于一组区间数，其两两比较的相对优势度构成的矩阵为模糊互补判断矩阵，称之为相对优势度矩阵.

根据区间数的相对优势度，给出直觉模糊数的相对优势度概念.

定义 1.6 设 $a=[\mu_a,1-\nu_a]$，$b=[\mu_b,1-\nu_b]$ 为两个直觉模糊数，则称

$$q(a>b)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\mu_b-\mu_a}},\pi_a=\pi_b,\\[2ex]\dfrac{1}{\pi_a-\pi_b}\ln\dfrac{e^{\nu_b-\nu_a}+1}{e^{\mu_a-\mu_b}+1},\pi_a\neq\pi_b\end{cases}\quad(1.5)$$

为直觉模糊数数 a 与 b 相比较时 a 优于 b 的程度，简称直觉模糊数的相对优势度. 其中 $\pi_a=1-\nu_a-\mu_a$，$\pi_b=1-\nu_b-\mu_b$.

注 1.1 对任意两个直觉模糊数 $a=[\mu_a,1-\nu_a]$ 和 $b=[\mu_b,1-\nu_b]$，其相对优势度 $q(a>b)$ 具有如下性质：(1) $0<q(a>b)<1$；(2) $q(a>b)+q(b>a)=1$，特别地 $q(a>a)=\frac{1}{2}$；(3) 当 $\mu_a-\nu_a=\mu_b-\nu_b$ 时，$q(a>b)=\frac{1}{2}$.

对于给定的一组直觉模糊数 $a_i=(\mu_i,\nu_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，基于相对优势度的直觉模糊数排序方法如下：

步骤 1 将直觉模糊数 $a_i=(\mu_i,\nu_i)$ 转化为隶属区间表示形式 $a_i=[\mu_i,1-\nu_i]$，$i=1,2,\cdots,n$；

步骤 2　根据公式(1.5)计算 $q_{ij}=q(a_i>a_j)$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,n$，得到相对优势度矩阵 $Q=(q_{ij})_{n\times n}$，显然 Q 为模糊互补判断矩阵；

步骤 3　利用文献[10]的基于互补判断矩阵的排序公式

$$\omega_i=\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{j=1}^{n}q_{ij}+\frac{n}{2}-1\right) \tag{1.6}$$

求出排序向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$，并根据 ω_i 的大小对直觉模糊数 a_i 进行排序.

注 1.2　对于直觉模糊数 $a=(0.1,0.8)$, $b=(0.2,0.4)$ 和 $c=(0.3,0.5)$，将其转化为隶属区间表示形式为 $a=[0.1,0.2]$, $b=[0.2,0.6]$, $c=[0.3,0.5]$. 根据文献[8]中基于可能度的直觉模糊数排序方法，由公式 1.2 求得可能度矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 1 & 0.5 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix},$$

再利用公式(1.6)求得排序向量为 $\omega_1=(0.1667,0.4167,0.4167)^{\mathrm{T}}$，即 $a<b=c$. 用相对优势度法求其相对优势度矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4379 & 0.4378\\ 0.5621 & 0.5 & 0.5\\ 0.5622 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}.$$

得排序向量为 $\omega_2=(0.31262,0.34368,0.34370)^{\mathrm{T}}$，即 $a<b<c$. 另外，利用文献[7]给出的直觉模糊数常用的得分函数与精确函数来对其进行排序，可求得排序结果为 $a<b<c$. 由此可以看出，本文给出的基于相对优势度的直觉模糊数排序方法能够在一定程度上克服可能度法排序失效的情况，并且与常用的直觉模糊数的记分函数排序方法的结果相一致. 但是从注 1.1 可以看出，这里所提出的基于相对优势度的排序方法，在某些特殊情况下有可能会出现失效情况，即当所有需排序的直觉模糊数得分函数都相等时，此方法无法分辨.

2　直觉模糊数的多属性决策方法

对于某一直觉模糊集的多属性决策问题：假设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为方案集，$G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$ 为属性集，$w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 为属性的权重向量，其中 w_j 对应为属性 G_j 的权重，且满足 $w_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{m}w_j=1$. 方案 A_i 关于属性 G_j 的属性值为直觉模糊数 $x_{ij}=(\mu_{ij},\nu_{ij})$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$，其中 μ_{ij} 表示方案 A_i 满足属性 G_j 的程度，ν_{ij} 表示方案 A_i 不满足属性 G_j 的程度，且 $\mu_{ij}\in[0,1]$, $\nu_{ij}\in[0,1]$, $0\leqslant\mu_{ij}+\nu_{ij}\leqslant 1$，可得到直觉模糊决策矩阵 $X=[x_{ij}]_{n\times m}$.

基于 IFWA 算子的直觉模糊信息多属性决策方法的具体步骤：

步骤 1　决策者根据实际情况给出直觉模糊决策矩阵 $X=[x_{ij}]_{n\times m}$，同时给出属性的权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$.

步骤 2　利用公式(1.1)，求出方案 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的综合属性值 $R_i=w_1x_{i1}\oplus w_2x_{i2}\oplus\cdots\oplus w_mx_{im}$, $i=1,2,\cdots,n$，并将其转化为隶属区间表现形式 $\widetilde{R}_i$.

步骤 3　由公式(1.5)计算出方案 A_i 的综合属性值 $\widetilde{R}_i$ 与方案 A_j 的综合属性值 $\widetilde{R}_j$ 之间的相对优势度 q_{ij}，得到相对优势度矩阵 $Q=(q_{ij})_{n\times n}$.

步骤 4　由公式(1.6)计算基于相对优势度矩阵 Q 的排序向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$，根据排序向量分量 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的大小对方案进行排序.

3　算例验证

某顾客欲购买一辆车，现有 5 种车型 $A_i(i=1,2,\cdots,5)$ 可供选择. 该顾客参考了以下 6 种评估指标：U_1 表示耗油量；U_2 表示最大里程数；U_3 表示价格；U_4 表示舒适度；U_5 表示车型设计；U_6 表示安全性. 属性 $U_j(j=1,2,\cdots,6)$ 的权重向量为 $w=(0.15,0.25,0.14,0.16,0.20,0.10)^{\mathrm{T}}$. 方案 $A_i(i=1,2,\cdots,5)$ 在属性 $U_j(j=1,2,\cdots,6)$ 下的特征信息用直觉模糊数给出[13].

步骤 1　决策者根据实际情况给出的直觉模糊决策矩阵

$$X=\begin{bmatrix}(0.3,0.5) & (0.6,0.1) & (0.4,0.3) & (0.8,0.1) & (0.1,0.6) & (0.5,0.4)\\ (0.6,0.3) & (0.5,0.2) & (0.6,0.1) & (0.7,0.1) & (0.3,0.6) & (0.4,0.3)\\ (0.4,0.4) & (0.8,0.1) & (0.5,0.1) & (0.6,0.2) & (0.4,0.5) & (0.3,0.2)\\ (0.2,0.4) & (0.4,0.1) & (0.9,0.0) & (0.8,0.1) & (0.2,0.5) & (0.7,0.1)\\ (0.5,0.2) & (0.3,0.6) & (0.6,0.3) & (0.7,0.1) & (0.6,0.2) & (0.5,0.3)\end{bmatrix},$$

属性的权重向量为

$$w=(0.15,0.25,0.14,0.16,0.20,0.10)^{\mathrm{T}}.$$

步骤 2　利用公式(1.1)，求出每个方案的综合属性值

$R_1=(0.5044,0.2440)$, $R_2=(0.5295,0.2240)$, $R_3=(0.5770,0.2034)$, $R_4=(0.5959,0)$, $R_5=(0.5354,0.2597)$,

转化为隶属区间表现形式为

$\widetilde{R}_1=[0.5044,0.7560]$, $\widetilde{R}_2=[0.5295,0.7760]$, $\widetilde{R}_3=[0.5770,0.7966]$, $\widetilde{R}_4=[0.5959,1]$, $\widetilde{R}_5=[0.5354,0.7403]$

步骤 3 由公式(1.5)计算出方案 A_i 的综合属性值 $\widetilde{R}_i$ 与方案 A_j 的综合属性值 $\widetilde{R}_j$ 之间的相对优势度 q_{ij}，得到相对优势度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4944 & 0.4859 & 0.4582 & 0.4981 \\ 0.5056 & 0.5 & 0.4915 & 0.4638 & 0.5037 \\ 0.5141 & 0.5085 & 0.5 & 0.4723 & 0.5122 \\ 0.5418 & 0.5362 & 0.5277 & 0.5 & 0.5399 \\ 0.5019 & 0.4963 & 0.4878 & 0.4601 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

步骤 4 由公式(1.6)计算出对优势度矩阵 Q 的排序向量

$$\omega=(0.1968,0.1982,0.2004,0.2073,0.1973)^{\mathrm{T}}.$$

根据排序向量分量得到方案的排序结果为 $A_4>A_3>A_2>A_5>A_1$，最佳方案为 A_4.

算例结果表明本文提出的排序方法在一定程度上克服了基于可能度的直觉模糊数排序法存在的缺陷，基于相对优势度的直觉模糊数多属性决策方法有效可行.

参考文献：

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems，1986，20：87-96.

[2] Chen S M，Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems，1994，67(2)：163-172.

[3] Hong D H，Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory [J]. Fuzzy Sets and Systems，2000，114：103-113.

[4] 李凡，饶勇. 基于 Vague 集的加权多目标模糊决策方法[J]. 计算机科学，2001，5：103-109.

[5] 周珍，吴祈宗. 基于 Vague 集的多准则模糊决策方法[J]. 小型微型计算机系统，2005，26(8)：1350-1353.

[6] Ye J. Improved method of multicriteria fuzzy decision-making based on vague sets[J]. Computer Aided Design，2007，39：164-169.

[7] Xu Z S，Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. International Journal of General Systems，2006，35：417-433.

[8] 林琳. 直觉模糊集在近似推理与决策中的应用[D]. 大连：大连理工大学，2006.

[9] 魏翠萍，唐锡晋. 基于可能度的一种直觉模糊集相似度测量方法[J]. 系统科学与数学，2010，30(9)：1275-1282.

[10] 徐泽水，达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报，2003，18(1)：67-70.

[11] 张吉军. 区间数的排序方法研究[J]. 运筹与管理，2003，12(3)：18-22.

[12] 谢海. 基于改进的相对优势度的区间数排序[J]. 科学技术与工程，2008，22(8)：5983-5986.

[13] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京：科学出版社，2008.

[14] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2007，15：1179-1187.

（责任编辑：尹　闯）

美研究发现新材料可滤掉水中放射性碘

放射性碘化物对饮用水的污染是核电事故引发的众多灾害中的一大问题。由于放射性碘化学性质与非放射性碘化物相同，人体无法通过感官进行区分，这种射性碘化物一旦进入人体就会在甲状腺中形成沉积，如果不及时采取措施便有可能引发癌症。最近美国科研人员研究发现，一种由林业副产品和甲壳类动物外壳组成的新材料或能帮助我们从水中滤掉放射性污染物。这种新材料是一种半纤维素的复合物，外形如同塑料泡沫一般，主要由林业副产品和壳聚糖组成，外部涂有一层木质纤维。该材料在水中能与放射性碘相结合并将其捕获，在使用时只需将其浸入需要净化的水中即可，不需要电力和专门的装置。此外，该材料也能清除淡水或海水中的砷等重金属物质。这种新材料的优势在供电出现紧张的突发紧急事件时便会体现出来。同时，该材料应用起来也较为方便灵活：小尺度应用中，可将这种材料像茶包一样浸入杯中实现净水；在大规模净化中，则可以将其制成大型过滤装置，让需要净化的水从其中通过即可。

（据科学网）