DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.02.015

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(2):93～98,107

薄板大挠度弯曲问题的 DRM-MFS 无网格方法*

DRM-MFS Meshless Method for Large Deflection Problem of Thin Plates

丁 睿,张 坤

DING Rui,ZHANG Kun

(苏州大学数学科学学院,江苏苏州 215006)

(School of Mathematical Science,Suzhou University,Suzhou,Jiangsu,215006,China)

摘要:在介绍薄板大挠度问题的控制方程及其推导过程的基础上,根据渐近迭代方法,分别用 DRM 方法和 MFS 方法近似特解和齐次解,得到求解薄板大挠度弯曲问题的 DRM-MFS 无网格近似方法,再通过数值算例验证方法的有效性及准确性.

关键词:薄板大挠度弯曲问题 无网格方法 对偶互易方法 基本解方法

中图法分类号:O241,O302 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)02-0093-06

Abstract: Undering introducing the derivation of control equation on large deflection problem of thin plat,applying incremental iteration method, and solving the approximate particular solution and homogeneous solution by DRM and MFS respectivly,a DRM-MFS meshless algorithm was presented for the large deflection problem of thin plate. The effectiveness and accuracy of this method were verified through numerical examples.

Key words: large deflection problem of thin plate,meshless method,dual reciprocity method,fundamental solutions methods

无网格方法是一种前景广阔的新兴数值计算方法.该方法主要的优点在于无需划分网格,能够解决许多其他传统方法(如 FEM、FDM、BEM 等)不易处理的问题.基于径向基函数(RBF)的无网格方法是无网格方法中比较重要的一类,该方法在求解 3-D 问题和需要频繁重划网格的如非线性分析问题中的优势更加明显.薄板大挠度弯曲问题是计算力学中的重要问题,已有学者研究了该问题的无网格方法,如 Naffa 等[1]将基于 RBF 的无网格方法引入到薄板大挠度弯曲问题;文献[2]中对不可移动边界的薄板大挠度问题进行了求解;Sladek[3]将局部边界积分方程和无网格方法结合求解非线性 Berger 薄板问题.基本解方法(MFS)[4]是一种操作简单、精度高的边界型无网格方法,与对偶互易技巧(DRM)相结合能够有效地求解非齐次问题.因此本文引入一种新的纯无网格求解格式(DRM-MFS)来求解薄板大挠度问题.

我们先介绍薄板大挠度问题的控制方程及其推导过程,再利用渐进迭代近似方法给出 DRM-MFS 求解薄板大挠度问题的格式,最后通过数值算例验证了方法的有效性和准确性.

1 薄板大挠度问题的控制方程及其推导过程

假定薄板的挠度 w 并不远小于厚度 h,但是仍然远小于中面的尺寸.首先记 N_x,N_y,N_{xy} 为中面内力(由横向载荷 q 引起而非纵向载荷),若取体力为零,则 x 轴和 y 轴方向的平衡微分方程为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

考虑薄板弯曲时的中面应变,即中面各点的纵向位移分量 u 和 v 以及挠度 w 所引起的应变叠加,得到几何方程:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \qquad (3)$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \qquad (4)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (5)$$

从(3)～(5)式中消去中面位移 u 和 v,得到相容方程

收稿日期:2012-01-13

作者简介:丁 睿(1969-),男,教授,博士,主要从事计算力学研究。

* 国家自然科学基金项目(No.10672111)资助。

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 w_{xy}}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (6)$$

把应变分量用物理方程 $\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-v\sigma_y)$，$\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-v\sigma_x)$，$\gamma_{xy}=\frac{2(1+v)}{E}\tau_{xy}$ 的变形

$$\varepsilon_x=\frac{1}{hE}(N_x-vN_y), \quad (7)$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{hE}(N_y-vN_x), \quad (8)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{hG}N_{xy} \quad (9)$$

替换，这样就得到由 N_x，N_y，N_{xy} 所组成的第三式. 若直接求解，则计算过程复杂，所以引入应力函数 $F=F(x,y)$，并结合(1)式和(2)式取

$$N_x=h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},N_y=h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},N_{xy}=-h\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}, \quad (10)$$

并将其代入(7)～(9)式，则应变分量变为

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-v\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right), \quad (11)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-v\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \quad (12)$$

$$\gamma_{xy}=-\frac{2(1+v)}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}. \quad (13)$$

再代入(6)式，可得第一个关于应力函数 $F=F(x,y)$ 的方程

$$\nabla^4 F=E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \quad (14)$$

由于我们目的是求出挠度 w，由文献[1]中关于弯曲过程的表达式，引入应力函数 F 和挠度 w 所满足的第二个方程

$$\nabla^4 w=\frac{h}{D}\left[\frac{q}{h}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]. \quad (15)$$

(14)式和(15)式就是薄板的大挠度微分方程组. 求解该问题，尚需引入边界条件:

(i) 简支: $w=0,M_n(w)=0$， (16)

(ii) 夹支: $w=0,\theta_n(w)=w_i n_i=0$， (17)

(iii) 自由边界: $V_n(w)=0,M_n(w)=0$， (18)

其中变量 θ_n 表示转角，M_n，V_n 分别是法向弯矩和剪切应力，其表达式是

$$M_n=-D\left[vu_{,ii}+(1-v)u_{,ij}n_i n_j\right], \quad (19)$$

$$V_n=-D\left[vu_{,ijj}n_i+(1-v)u_{,ijk}n_i t_j t_k\right]. \quad (20)$$

这里 $n=[n_1,n_2]$，$t=[-n_2,n_1]$ 分别表示边界上的单位外法向量和切向量. 对于应力函数 F，假定薄板外边界不受面内应力，取边界条件[1]为

$$F=\frac{\partial F}{\partial n}=0. \quad (21)$$

综上所述，控制方程(14)和(15)及边界条件(16)～(21)唯一确定了应力函数 F 和挠度 w. 一旦确定了 F，则由(10)式可确定中面应力. (14)式和(15)式是耦合的且高度非线性的方程组，多采用类似文献[1]中的渐进迭代方法和文献[5]中的差分法等线性化方法近似.

2 DRM-MFS 求解薄板大挠度问题的格式

考虑线性微分方程(组):

$$A(u(X))=f(X),X\in\Omega\subset R^d,d=1,2,3, \quad (22)$$

其边界条件为

$$S(u(X))=g(X),X\in\Gamma, \quad (23)$$

其中 $X\in R^d$，d 是定解区域所属空间的维数，$u(X)$ 是场函数，A、S 是线性微分算子(向量)，Ω 是有界区域，Γ 充分正则的边界.

假定(22)式和(23)式具有唯一解，根据(22)式的线性特性，其解可表示成特解 u_p 和齐次解 u_h 的和，即 $\hat{u}\triangleq u_h+u_p$，其中特解 u_p 满足非齐次方程

$$A(u_p(X))=f(X), \quad (24)$$

但是未必满足边界条件(23). 而 u_h 满足如下齐次方程及边界条件

$$\begin{cases}A(u_h(X))=0,\\ S(u_h(X))=g(X)-S(u_p(X)).\end{cases} \quad (25)$$

求特解和齐次解的方法有许多，我们分别采用对偶互易方法(DRM)和基本解方法(MFS)求解特解 u_p 和齐次解 u_h.

2.1 对偶互易方法(DRM)

首先用径向基函数 RBF 近似右端源项 $f(X)$，得

$$f_p(X)=\sum_{j=1}^{N_D}\alpha_j\varphi_j(X)+\sum_{i=1}^{l}\beta_i p_i(X), \quad (26)$$

其中 $\{\alpha_j\}$，$\{\beta_i\}$ 是待定系数，节点 $\{X_j\}_{j=1}^{N_D}$ 是域内点(也可包含边界点)，N_D 是域内点个数，$\varphi_j(X)=\varphi(\|X-X_j\|):R^d\to R^+$ 是径向基函数，d 维完备多项式基函数满足 $\{p_i(X)\}_{i=1}^{l}\in P_{m-1}$，$\dim P_{m-1}=C_{m+d-1}^{d}$，具体性质可参考文献[6]. 引入多项式项主要是消除系数阵的奇异性.

近似特解 $u_p(X)$ 的表达式可表示为

$$u_p(X)=\sum_{j=1}^{N_D}\alpha_j\Phi_j(X)+\sum_{i=1}^{l}\beta_i\Psi_i(X), \quad (27)$$

其中 $A(\Phi_j(X))=\varphi_j(X)$，$j=1,\cdots,N_D$，$A(\Psi_i(X))=p_i(X)$，$i=1,\cdots,l$.

尽管文献[7]中研究结果指出，MQ-径向基的插值精度最高，但是它含有形参数且对解有较大的影

响. 为简单起见,选取 PS-径向基 r^5 作为特解的插值函数.

2.2 基本解方法(MFS)

MFS 是求解齐次解的有效的纯边界型无网格方法. 它是将齐次解 $u_h(X)$ 表示成相应算子的奇异基本解在边界源点上的线性组合,即

$$u_h(X) = \sum_{i=1}^{N_B} a_i u_i^*(X), \tag{28}$$

其中 $\{a_i\}_{i=1}^{N_B}$ 是待定系数,$u_i^*(X) = u^*(X - Y_i)$ 是相应算子的基本解,$\{Y_j\}_{j=1}^{N_B} \notin \Omega \cup \delta\Omega$ 是虚拟源点,N_B 是边界节点个数. 由于基本解具有奇异性,故需要在定解区域之外选取虚拟边界点以消除其奇异性. 为满足解的唯一性,近似解 $u_h(X)$ 还必需满足相应的边界条件(25).

设 $\{X_i\}_{i=1}^{m}$ 是边界 Ω 上的一组点,在这些点上配置边界条件得到如下方程组:

$$S(u_h(X_i)) = g(X_i) - S(u_p(X_i)), i = 1, \cdots, m. \tag{29}$$

这里 $m \geqslant n$,选取 $m = n$. 至此联立(28)式和(29)式可求得齐次解.

在求解齐次解和特解的待定系数时本文使用配点法,即另外选取一组特定的点(个数不小于相应的节点个数)使之满足相应的条件,确定未知数的方法. 相应的点称为配点.

2.3 DRM-MFS 求解格式

由于计算过程中节点和配点可以完全相同,此时如果不加多项式项消除奇异性,那么求解特解时使用像 TPS: $r^{\beta}\log r$ 和 PS: r^{β} 这样的条件正定 RBF 时形成的系数矩阵对角线为零,故而极易奇异. 我们采用文献[8]中所使用技巧进行求解,即从(28)式和(29)式(取 $l = 0$)得到近似解表达式:

$$u(X) \approx \hat{u}(X) = u_p + u_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi_j(X) + \sum_{i=1}^{n} a_i u^*(X - Y_i), \tag{30}$$

将上式代入(22)式和(23)式并选取插值点 $\{X_i\}_{i=1}^{N_I} \in \Omega$ 和边界点 $\{X_j\}_{j=1}^{N_S} \in \delta\Omega$ 得

$$\begin{cases} A(u_h(X_i) + u_p(X_i)) = f(X_i), i = 1, \cdots, N_I, \\ S(u_h(X_j) + u_p(X_j)) = g(X_j), j = 1, \cdots, N_S. \end{cases} \tag{31}$$

所有待定系数一旦确定,则近似解 $\hat{u}(X)$ 表达式就确定,就可以计算定解区域内任意计算点处的近似值. 上述格式称为 DRM-MFS 格式.

2.4 渐进迭代 DRM-MFS 步骤

给出 DRM-MRM 与原问题渐近迭代方法相结合进行求解的步骤,其中的边界条件以简支为例,其它边界相应替换.

步骤 1 先假定初始应力函数 $F_0 = 0$,使得(15)式变为 $D\Delta^2 w_0 = q$,边界条件和小挠度弯曲问题中相同. 这是一个重调和方程,我们取其奇异基本解[9]为

$$u_1^*(X) = -\frac{1}{8\pi} r^m \log(r), m = 0, 1 \tag{32}$$

的线性组合. 根据 2.3 节的方法,得到初始挠度 w_0 的表达式:

$$w_0(X) = \sum_{j=1}^{N_D} \alpha_j^{u0} \Phi(\| X - X_D^j \|) + \sum_{i=1}^{N_B} a_i^{w0} u_1^*(\| X - X_B^i \|) + \sum_{i=1}^{N_B} b_i^{w0} u_0^*(\| X - X_B^i \|), \tag{33}$$

其中 $\alpha_j^{u0}, a_i^{u0}, b_i^{u0}$ 是关于挠度的待定系数,Φ 是径向基函数,X_B^i, X_D^j 分别是相应的边界节点和域内节点,其个数分别是 N_B 和 N_D. 再结合相应的边界条件,得到

$$\begin{bmatrix} \Delta^2\Phi & 0 & 0 \\ M_n(\Phi) & M_n(u_1^*) & M_n(u_0^*) \\ \Phi & u_1^* & u_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j^{w_0} \\ a_i^{w_0} \\ b_i^{w_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q/D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

求解(34)式得到 $\alpha_j^{w_0}, a_i^{w_0}$ 和 $b_i^{w_0}$;

步骤 2 把由步骤 1 得到的系数 $\alpha_j^{w_0}, a_i^{w_0}$ 和 $b_i^{w_0}$ 代入(33)式,得到挠度 w_0 的估计,并计算 $NL(w_0, w_0)$,其中

$$NL(w, F) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}; \tag{35}$$

步骤 3 将 $NL(w_0, w_0)$ 代入边界条件(21)和(14)式,即

$$\begin{bmatrix} \Delta^2\Phi & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} & \dfrac{\partial u_1^*}{\partial n} & \dfrac{\partial u_0^*}{\partial n} \\ \Phi & u_1^* & u_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j^{F_1} \\ a_i^{F_1} \\ b_i^{F_1} \end{bmatrix} = \frac{E}{2}\begin{bmatrix} -NL(w_0, w_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

求出关于应力的待定系数 $\alpha_j^{F_1}$, $a_i^{F_1}$, $b_i^{F_1}$,得到应力函数表达式

$$F_1(X) = \sum_{j=1}^{N_D} \alpha_j^{F_1} \Phi(\| X - X_D^j \|) + \sum_{i=1}^{N_B} a_i^{F_1} u_1^*(\| X - X_B^i \|) + \sum_{i=1}^{N_B} b_i^{F_1} u_0^*(\| X - X_B^i \|); \tag{37}$$

步骤 4 计算 $NL(w_0, F_1)$,并代入

$$\begin{bmatrix} \Delta^2\Phi & 0 & 0 \\ M_n(\Phi) & M_n(u_1^*) & M_n(u_0^*) \\ \Phi & u_1^* & u_0^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_j^{w_1} \\ \alpha_i^{w_i} \\ \alpha_i^{w_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q/D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hNL(w_1, F_1)/D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

求得 $\alpha_j^{w_1}$，$a_i^{w_1}$ 和 $b_i^{w_1}$；

步骤5　将系数 $\alpha_j^{w_1}$，$a_i^{w_1}$ 和 $b_i^{w_1}$ 代入(21)式(将 w_0 换为 w_1)得到 w_1，并计算其二阶导数以求得 $NL(w_1, F_1)$；

步骤6　重复步骤2～5，直到连续两次算出的挠度值 w 充分接近为止.

3　数值算例

考虑3个例子[1]. 前两个例子的算法精度和其近似解析解的结果相比较，第3个与FEM的结果比较，而且所有算例中都假定均布载荷等于 q，泊松比 $v=0.3$. 对于一般解，图像上的所有变量都无量纲化，因此坐标、载荷、挠度和应力分别表示为 $\bar{x}=x/a$，$\bar{y}=y/a$，$q^*=qa^4/Eh^4$，$\bar{w}=w/h$ 和 $\bar{\sigma}=\sigma a^2/Eh^2$，取板厚 $h=0.035\mathrm{m}$，杨氏模量 $E=10^{12}\mathrm{N/m^4}$，其它各参数的取值将在下面给出. 鉴于基本解的奇异性以及虚边界取法的多样性，我们取虚拟边界为相似边界，且相似比例值用 $ratio$ 表示，即虚边界点 $Y=ratio\times X$.

例1　均布载荷 $\bar{q}$ 下的圆形简支板.

考虑均布载荷下的圆形简支薄板，问题的参数($N_B=4$，$N_D=12$，$ratio=2.3$)及节点分布，如果不另外指定，则其取值如图1所示，载荷 q^* 从0.125到2按照增量0.125递增. 该问题的近似解析解如下:

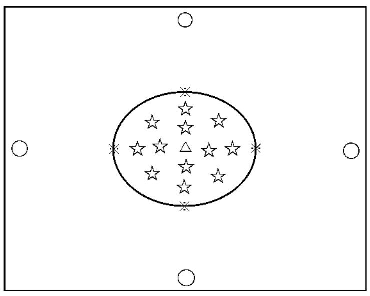

图1　简支圆薄板区域及节点分布

Fig. 1　Domain for the Simply supported circular thin plate and nodes distributions

※: 边界节点; ○: 虚拟边界点; △: 中心点; ☆: 内部节点。

※: Boundary nodes; ○: Virtual boundary nodes; △: Central point; ☆: Inner nodes.

$$\bar{w}_c + A\bar{w}_c^3 = Bq^*, \quad (39)$$

$$\overline{\sigma_m} = \alpha\bar{w}_c^2, \quad (40)$$

$$\overline{\sigma_b} = \beta\bar{w}_c, \quad (41)$$

其中 $\bar{w}_c$ 是中心挠度，$\bar{\sigma}_m$ 是板的中面应力(membrane stress)，$\bar{\sigma}_b$ 是最外缘纤维弯曲应力. 常数 $A=0.262$，$B=0.696$，$\alpha=0.295$，$\beta=1.778$，圆半径 $a=1$.

图2是无量纲载荷的近似解图像($ratio=5.5$). 由图3(a)可见，随着载荷的增加，板中心的挠度也随之变大，曲线形状有一定弧度，不是线性变化的，也说明了这一问题的非线性性态. 图3(b)结果显示，数值解和解析解吻合很好. 这说明了本方法可以用于求解非线性问题，并能取得较好的结果. 从图4($q^*=1$)看，提高 $ratio$ 值，一定程度下解几乎不变，即 $ratio$ 较小时，解精度达不到要求，说明合理选择参数 $ratio$ 很重要.

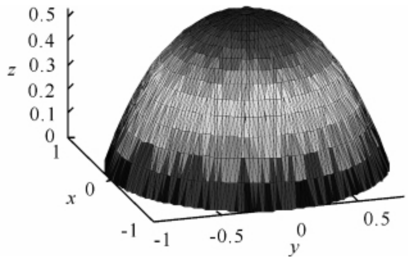

图2　$q^*=1$ 时的近似解

Fig. 2　The approximate solution when $q^*=1$

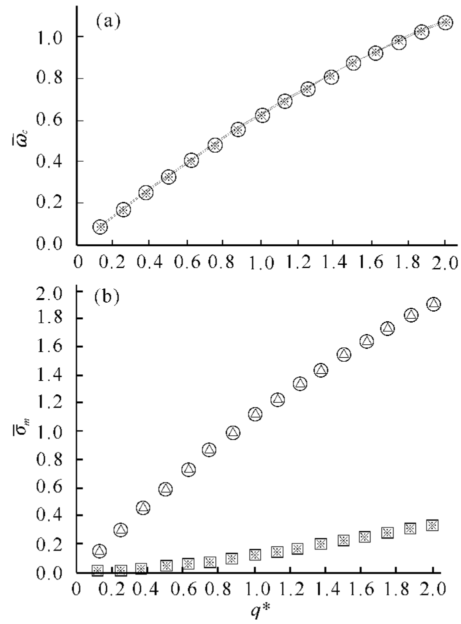

图3　简支圆薄板中心挠度(a)及中心点应力(b)与载荷 q^* 的关系

Fig. 3　Central deflection(a) and the stress at the center (b) versus load q^* for the simply supported circular thin plate

(a) ※: DRM-MFS, ○: Analytical; (b) ※: DRM-MFS, □: Analytical, Bending stress: △: DRM-MFS, ○: Analytical.

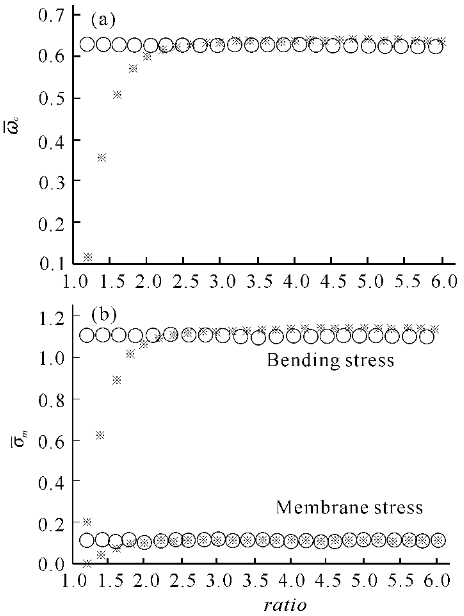

图 4 *ratio* 对中心挠度(a)和中心点应力(b)的影响

Fig. 4 The effect of ratio to the central deflection (a) and the stress at the center (b)

(a) ※: DRM-MFS, ○: Analytical; (b) ※: DRM-MFS, ○: FEM.

例 2 均布载荷 $\bar{q}$ 下的圆形夹支板.

假定边界条件是夹支，解析解仍如例 1，节点分布如图 5($N_B = 8$, $N_D = 16$)，取 $A = 0.146$, $B = 0.171$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 2.86$，无量纲载荷 q^* 从 1 到 11 按增量 1 递增，其它参数见例 1. 图 6 是无量纲载荷 $q^* = 1$，

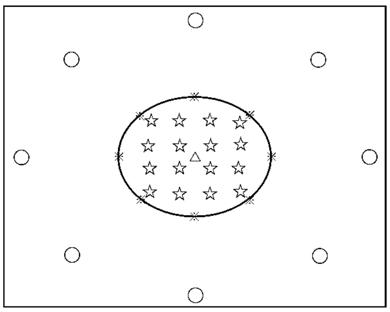

图 5 夹支圆形固支板区域及节点分布

Fig. 5 Domain for the clamped circular plate and nodes distributions

※: 边界节点; ○: 虚拟边界点; △: 中心点; ☆: 内部节点。

※: Boundary nodes; ○: Virtual boundary nodes; △: Central point; ☆: Inner nodes.

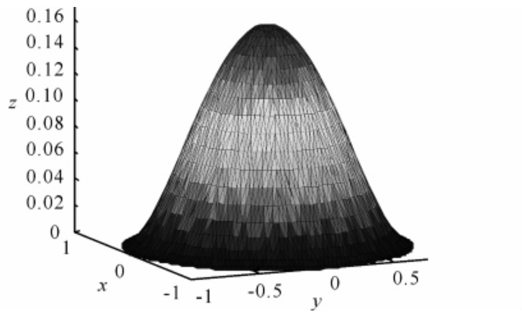

图 6 $q^* = 1$ **时的近似解**

Fig. 6 The approximate solution when $q^* = 1$

ratio = 2.5 时近似解. 由图 7 结果可见，两者吻合的很好，图 8 显示结果和例 1 类似.

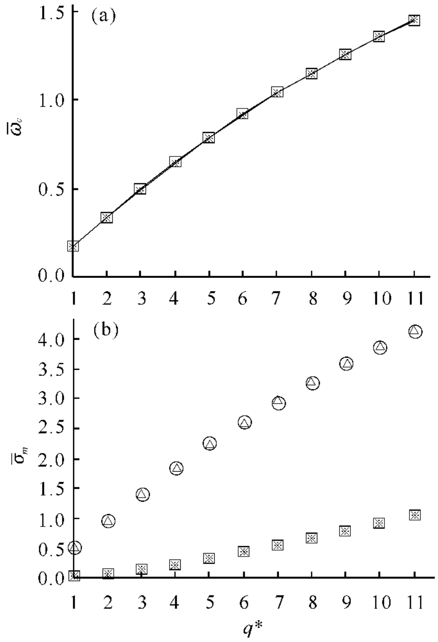

图 7 载荷 q^* 对中心挠度(a)和中心点应力(b)的影响(ratio = 2.3)

Fig. 7 The effect of load to the central deflection(a) and the stress at the center(b)

(a) ※: DRM-MFS, □: Analytical; (b) ※: DRM-MFS, □: Analytical, Bending stress: △: DRM-MFS, ○: Analytical.

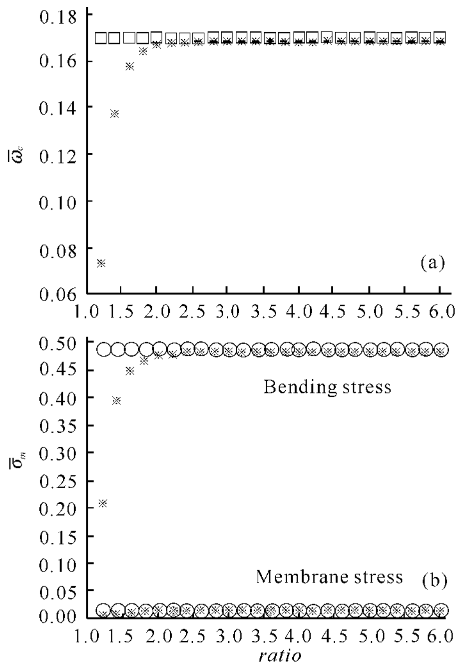

图 8 *ratio* **对中心点挠度(a)和中心点应力(b)的影响**

Fig. 8 The effect of *ratio* to the central deflection(a) and the stress at the center (b)

(a) ※: DRM-MFS, □: Analytical; (b) ※: DRM-MFS, ○: FEM.

例 3 均布载荷 $\bar{q}$ 下的方形板.

载荷 q^* 从 2 到 32 按照增量 2 递增，边长尺寸及节点分布如图 9($N_B=12, N_D=4, ratio=1.32$)．图 10 是载荷 $q^*=2$ 时近似解图像 ($ratio=2.7$)．从图 11 (a) 看，当载荷变大时，$ratio$ 的值也要相应变大才能取得较好的结果．图 12($q^*=2$) 显示结果和例 1 类似．

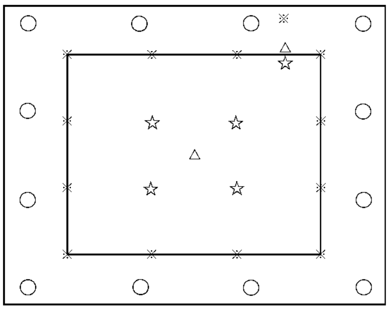

图 9　方形板区域及节点分布

Fig. 9　Domain for the square plate and nodes distributions

※：边界节点；○：虚拟边界点；△：中心点；☆：内部节点。

※：Boundary nodes; ○：Virtual boundary nodes; △：Central point; ☆：Inner nodes.

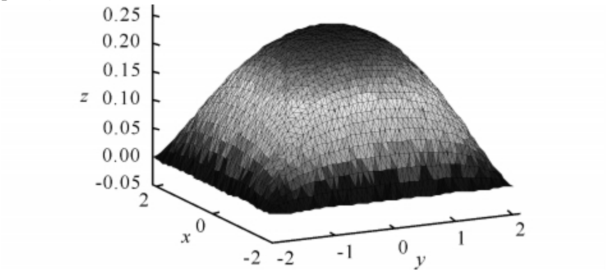

图 10　载荷 $q^*=2$ 时近似解

Fig. 10　The approximate solution when load $q^*=2$

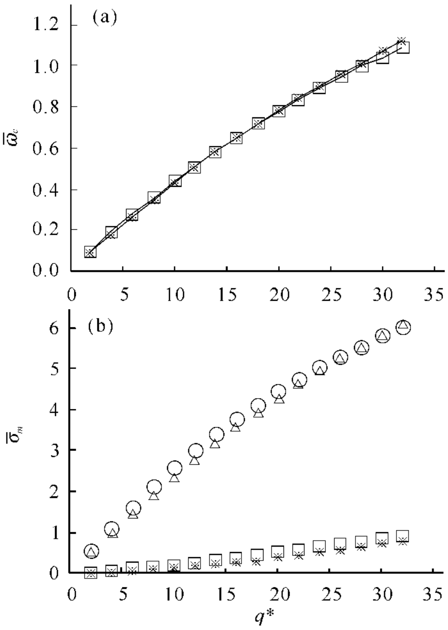

图 11　载荷 q^* 对中心点挠度 (a) 和中心点应力 (b) 的影响

Fig. 11　The effect of load q^* to the central deflection (a) and the stress at the center (b)

(a) ※：DRM-MFS，□：FEM；(b) ※：DRM-MFS，□：Analytical，Bending stress：△：DRM-MFS，○：Analytical.

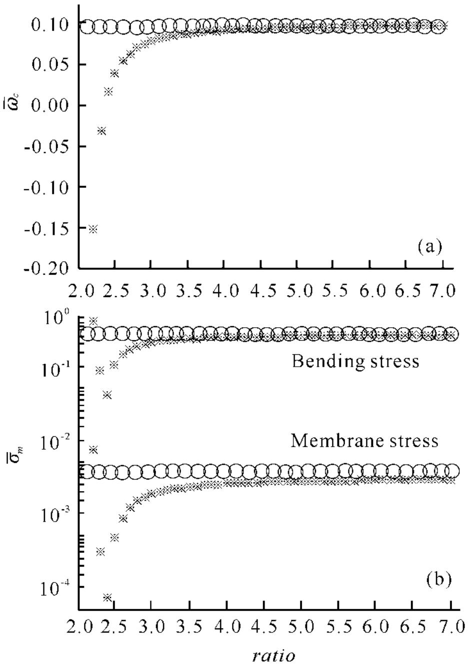

图 12　$ratio$ 对中心挠度 (a) 和中心点应力 (b) 的影响

Fig. 12　The effect of $ratio$ to the central deflection (a) and the stress at the center (b)

(a) ※：DRM-MFS，○：FEM；(b) ※：DRM-MFS，○：FEM.

本文针对由应力函数 F 和挠度 w 耦合的高度非线性的薄板大挠度弯曲问题，构造了 DRM-MFS 无网格方法．通过数值算例与近似解析解和 FEM 结果比较，说明了本文方法的有效性．另外，还讨论了各类参数对解的影响．DRM-MFS 方法无需背景网格积分，容易编程实现，而且有很好的精度，可以推广到其它的非线性问题．

参考文献：

[1] Naffa M, Al-Gahtani H J. RBF-based meshless method for large deflection of thin plates [J]. Eng Anal Bound Ele, 2007, 31: 311-317.

[2] Al-Gahtani H J, Naffa M. RBF meshless method for large deflection of thin plates with immovable edges [J]. Eng Anal Bound Elem, 2009, 33: 176-183.

[3] Sladek J, Sladek V A. Meshless method for larger deflection of plates [J]. Computational Mechanics, 2003, 30: 155-163.

[4] Golberg M A. The method of fundamental solutions for Poisson's equation [J]. Eng Anal Bound Elem, 1995, 16: 205-213.

[5] 徐芝伦．弹性力学 [M]．第 4 版．北京：高等教育出版社，2006.

(下转第 107 页 Continue on page 107)

solving linear systems [J]. Journal of research, National Bureau of Standards: Section B, 1952, 49: 409-436.
[2] Fleteher R, Reeves C. Function minimization by conjugate gradients [J]. Compute Journal, 1964, 7: 149-154.
[3] Polak E, Ribiere G. Note sur la convergence de directions conjugees [J]. Rev Prancaise Informat Recherche Operatinelle, 1969, 6: 35-43.
[4] Polyak B T. The conjugate gradient method in extreme problems [J]. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1969, 9: 94-112.
[5] Hager W W, Zhang H. A new conjugate gradient method with guaranteeddescent and an efficient line search [J]. SIAM Journal on Optimization, 2005, 16: 170-192.
[6] Dai Y, Yuan Y. A nonlinear conjugate gradient with a strong global convergence properties [J]. SIAM Journal on Optimization, 2000, 10: 177-182.
[7] Yuan G L. Modified nonlinear conjugate gradiente methods with sufficient descent property for large-scale optimization problems [J]. Optimization Letters, 2009, 3: 11-21.
[8] Li Z, Zhou W J, Li D H. Global convergence of a modified Fletcher-Reeves conjugate gradient method with Armijo-type line search [J]. Numerical Mathematics, 2006, 104: 561-572.
[9] Yuan G L, Lu X W, Wei Z X. A conjugate gradient method with descent direction forunconstrained optimization [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 233: 519-530.
[10] Li G Y, Tang C M, Wei Z X. New conjugacy condition and related new conjugate gradient methods for unconstrained optimization [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 202: 523-539.
[11] Yao S W, Wei Z X, Huang H. A note about WYL's conjugate gradient method and its applications [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191: 381-388.
[12] Dai Z F, Tian B S. Global convergence of some modified PRP nonlinear conjugate gradient methods [J]. Optimization Letters, 2011, 5: 615-630.
[13] Yuan G L, Wei Z X. Convergence analysis of a modified BFGS method on convex minimazations [J]. Computational Optimization and Applications, 2010, 47: 237-255.

(责任编辑: 尹　闯)

(上接第 98 页 Continue from page 98)

[6] Liu G R, GU Y T. An introduction to meshfree methods and their programming [M]. Netherlands: Springer Verlag, 2005.
[7] Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods [J]. Math Comput, 1982, 38: 181-200.
[8] Qin Q H, Wang H, Kompis V. MFS with RBF for thin plate bending problems on elastic foundation [C]//Manolis G D, Polyzos D, eds. Recent Advances in Boundary Element Methods. New York: Spring Verlag, 2009, 38: 367-378.
[9] Chen W, Shen Z J, Yuan G W. General solutions and fundamental solutions of varied orders to the vibratioal thin, the Berger, and the Winkler plates [J]. Eng Anal Bound Elem, 2005, 29: 699-702.

(责任编辑: 尹　闯)