DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.04.015

广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(4):335～338

一类具双重退化的四阶粘性扩散方程广义解的唯一性

Uniqueness of Solutions to a Fourth Order Viscous Diffusion Equation with Double Degeneracy

庞　通[1],凌征球[2]

PANG Tong[1],LING Zheng-qiu[2]

(1.广西机电职业技术学院,广西南宁　530007;2.玉林师范学院数学与信息科学学院,广西玉林　537000)

(1. Guangxi Technological College of Machinery and Electricity, Nanning, Guangxi, 530007, China; 2. Institute of Mathematics and Information Science, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要:基于椭圆算子理论,通过正则化技术获得一类具双重退化的四阶粘性扩散方程的初边值问题广义解的唯一性.

关键词:扩散方程　唯一性　粘性　退化

中图法分类号:O175.25　　文献标识码:A　　文章编号:1005-9164(2011)04-0335-04

Abstract: Based on elliptic operators, a fourth order viscous diffusion equation with double degeneracy was studied ,and the uniqueness of solution was proven by means of a regularizing technique.

Key words: diffusion equation, uniqueness, viscous, degenerate

研究下面一类具有双重退化性的四阶粘性扩散方程的初边值问题:

$$\frac{\partial B(u)}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\Delta B(u)}{\partial t}=\Delta A(\Delta u)+\operatorname{div}\vec{\sigma}(u),(x,t)\in Q_T, \tag{0.1}$$

$$u(x,t)=u_x(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{0.2}$$

$$B(u(x,0))=u_0(x),x\in\Omega. \tag{0.3}$$

其中 Ω 是 R^N 中一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,$Q_T=\Omega\times(0,T)$,$\lambda\geqslant 0$ 是粘性系数,$A(s)$ 和 $B(s)$ 是 R 上的连续可微函数,分别表示扩散系数与物质的扩散函数,并且 $A'(s)\geqslant 0$,$B'(s)\geqslant 0$,$B(s)=\Phi_1(A(\Delta s))$,$\vec{\sigma}(s)=\vec{\Phi}_2(B(s))$,$\Phi_1(s)$ 和 $\vec{\Phi}_2(s)$ 分别是局部 Lipschite 连续函数和局部 Lipschite 连续向量值函数.

方程(0.1)是一种重要的退化扩散方程,可以描述自然界广泛存在的一些现象,例如渗流问题和非线性流体运动等.当 $\lambda=0$,$B(s)=s$ 和 $A(\Delta u)=\psi(u)$ 时,得到标准的非线性扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta\psi(u)+\operatorname{div}\vec{\sigma}(u), \tag{0.4}$$

其中在满足 $\psi'(s)=0$ 的点,方程(0.4)是退化的.类似的,如果 $\lambda=0$,$A(\Delta u)=\psi(u)$,方程(0.1)变成

$$\frac{\partial C(u)}{\partial t}=\Delta\psi(u)+\operatorname{div}\vec{\sigma}(u), \tag{0.5}$$

并且在满足 $\psi'(s)=0$ 或 $C'(s)=0$ 的点,方程(0.5)也是退化的.方程(0.4)和(0.5)已经得到了广泛的研究.特别是解的唯一性的讨论已有许多的研究成果[1~6].后来,Wang[7] 讨论了下列方程解的唯一性

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\Delta u}{\partial t}=\Delta\psi(u)+\operatorname{div}\vec{\sigma}(u). \tag{0.6}$$

Quintanilla[8] 还讨论了更一般的相关方程

$$au_{tt}+bu_t=c\Delta u+\Delta u_t+f(x,t) \tag{0.7}$$

解的唯一性.在这里,如果 $a=0$,$b=\frac{1}{\lambda}$,$f(x,t)=0$,方程就变成了方程(0.6)在 $\vec{\sigma}(u)=\vec{0}$ 的线性形式.

本文受 Brézis 等[9] 人思想的启发,基于椭圆算子理论,采用正则化技术,讨论了初边值问题(0.1)～(0.3)广义解的唯一性.

收稿日期:2011-05-23

作者简介:庞　通(1963-),男,讲师,主要从事应用数学研究。

1 基本定义

定义 1 函数 $u(x,t)$ 称为初边值问题(0.1)～(0.3)的广义解，如果 $u\in L^\infty(Q_T),B(u)\in BV(Q_T)$，并且对任意的检验函数 $\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$，下列积分等式成立

$$\iint_{Q_T}B(u)(I-\lambda\Delta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\iint_{Q_T}A(\Delta u)\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_T}\vec{\sigma}(u)\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

2 主要结果

定理 1 如果 $u_1,u_2\in L^\infty(Q_T)$ 是初边值问题(0.1)～(0.3)的两个广义解，并且 $\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\in L^\infty(Q_T)$，$i=1,2,\cdots,N$，$F(u)=\Delta u$ 是 R 上的单调不减函数，那么在 Q_T 几乎处处成立 $B(u_1)=B(u_2)$.

证明 假设 $u_1,u_2\in L^\infty(Q_T)$ 是初边值问题(0.1)～(0.3)的两个广义解. 记 $\overline{B}=B(u_1)-B(u_2)$，$v=A(\Delta u_1)-A(\Delta u_2)$，$\overrightarrow{H}=\vec{\sigma}(u_1)-\vec{\sigma}(u_2)$. 根据广义解的定义，可以得到

$$\iint_{Q_T}\overline{B}(I-\lambda\Delta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}v\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\iint_{Q_T}\overrightarrow{H}\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{2.1}$$

希望通过选择特殊的检验函数 φ，由等式(2.1)证明在 Q_T 内几乎处处成立 $\overline{B}=0$.

对于充分小的 $\mu>0$，定义算子 T_μ

$$T_\mu:L^2(\Omega)\to H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),g\mapsto y,$$

这里 $y=T_\mu g$ 由下列 Dirichlet 问题来确定

$$-\Delta y+\mu y=g,x\in\Omega,\tag{2.2}$$
$$y=0,x\in\partial\Omega.$$

根据椭圆方程的 L^p 理论[10]，$y=T_\mu g$ 是由函数 g 唯一确定的. 同时，对于任意的 $f,g\in L^2(\Omega)$，显然有

$$\int_\Omega g(T_\mu f)\mathrm{d}x=\int_\Omega f(T_\mu g)\mathrm{d}x.$$

又由椭圆方程的 L^2 理论知道 $T_\mu g\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，而且

$$\|T_\mu g\|_{H^2(\Omega)}\leqslant C_0\|g\|_{L^2(\Omega)},\tag{2.3}$$

这里，C_0 是一个仅与 Ω,N 有关，而与 μ,g 无关的常数.

再用 $T_\mu\varphi$ 代替(2.1)式中的检验函数 φ，并注意

$$\iint_{Q_T}\overline{B}(I-\lambda\Delta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)\overline{B}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

我们可以得到

$$\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)\overline{B}\frac{\partial T_\mu\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}v\Delta T_\mu\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\iint_{Q_T}\overrightarrow{H}\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)T_\mu\overline{B}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\iint_{Q_T}v(\mu T_\mu\varphi-\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}(\mathrm{div}\overrightarrow{H})T_\mu\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$\iint_{Q_T}-(I-\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu\overline{B}}{\partial t}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}(\mu T_\mu v-$$
$$v)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}T_\mu(\mathrm{div}\overrightarrow{H})\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

由函数 φ 的任意性，在分布的意义下可以得到

$$(I-\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu\overline{B}}{\partial t}=\mu T_\mu v-v+T_\mu(\mathrm{div}\overrightarrow{H}).\tag{2.4}$$

定义函数

$$g_\mu(t)=\int_\Omega(I-\lambda\Delta)T_\mu\overline{B}(x,t)\cdot\overline{B}(x,t)\mathrm{d}x.$$

由于

$$g_\mu(t)=\int_\Omega(I-\lambda\Delta)(T_\mu\overline{B})\overline{B}\mathrm{d}x=\int_\Omega(I-\lambda\Delta)\cdot$$
$$(T_\mu\overline{B})(-\Delta T_\mu\overline{B}+\mu T_\mu\overline{B})\mathrm{d}x=\mu\|T_\mu\overline{B}\|^2+(1+$$
$$\lambda\mu)\|\nabla T_\mu\overline{B}\|^2+\lambda\|\Delta T_\mu\overline{B}\|^2.$$

因此，如果我们证明了

$$\lim_{\mu\to0}g_\mu(t)=0,\text{a. e. }t\in(0,T).\tag{2.5}$$

那么，对任意的 $t\in(0,T)$，在 $L^2(\Omega)$ 中有

$$\lim_{\mu\to0}\mu T_\mu\overline{B}(\cdot,t)=0,\lim_{\mu\to0}\Delta T_\mu\overline{B}(\cdot,t)=0.$$

即在 $L^2(\Omega)$ 中有

$$\overline{B}(\cdot,t)=\lim_{\mu\to0}(-\Delta T_\mu\overline{B}(\cdot,t)+\mu T_\mu\overline{B}(\cdot,t))=0.$$

由此就完成了解的唯一性定理的证明.

假设 J_ε 是关于 t 的标准磨光算子，根据(2.4)式以及算子 T_μ 的对称性，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(I-\lambda\Delta)T_\mu(J_\varepsilon\overline{B})J_\varepsilon\overline{B}\mathrm{d}x=2\int_\Omega(I-$$
$$\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu(J_\varepsilon\overline{B})}{\partial t}J_\varepsilon\overline{B}\mathrm{d}x=2\int_\Omega J_\varepsilon((I-\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu\overline{B}}{\partial t})\cdot$$
$$J_\varepsilon\overline{B}\mathrm{d}x=2\int_\Omega J_\varepsilon(\mu T_\mu v-v+T_\mu(\mathrm{div}\overrightarrow{H}))J_\varepsilon\overline{B}\mathrm{d}x.$$

再从 0 到 t 积分，有

$$\int_\Omega(I-\lambda\Delta)T_\mu(J_\varepsilon\overline{B}(x,t))J_\varepsilon\overline{B}(x,t)\mathrm{d}x=\int_\Omega(I-$$
$$\lambda\Delta)T_\mu(J_\varepsilon\overline{B}(x,0))J_\varepsilon\overline{B}(x,0)\mathrm{d}x+2\iint_{Q_t}J_\varepsilon(\mu T_\mu v-v+$$
$$T_\mu(\mathrm{div}\overrightarrow{H}))J_\varepsilon\overline{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

令 $\varepsilon\to0$，并注意

$$\overline{B}(x,0)=B(u_1(x,0))-B(u_2(x,0))=u_0(x)-$$
$$x_0(x)=0,$$

可以得到

$$g_\mu(t)=2\iint_{Q_t}(\mu T_\mu v-v+T_\mu(\mathrm{div}\overrightarrow{H}))\overline{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\tag{2.6}$$

由 $B(u_1),B(u_2)\in BV(Q_T)$ 知道$\overline{B}$是有界的，$A(s),B(s)$ 是满足 $A'(s)\geqslant 0,B'(s)\geqslant 0$ 的连续可微函数，以及 $\Phi_1(s),\vec{\Phi}_2(s)$ 满足局部 Lipschite 连续性，因此，存在两个正的常数 M_0 和 M_1，使得下列估计式成立

$$|\vec{H}|\leqslant M_0|\overline{B}|,\ |\overline{B}|\leqslant M_1|v|.$$

再根据 $A'(s)\geqslant 0,B'(s)\geqslant 0$ 的假设知道$\overline{B}$和 v 有相同的符号，而 $F(u)=\Delta u$ 又是单调不减函数，因此

$$\overline{B}v=|\overline{B}||v|\geqslant\frac{1}{M_1}|\overline{B}|^2.$$

记

$$g_\mu(t)=\int_\Omega(T_\mu\overline{B}\cdot\overline{B}-\lambda\Delta T_\mu\overline{B}\cdot\overline{B})\mathrm{d}x=I_1+I_2,$$

并注意到

$$I_2=-\int_\Omega\lambda\Delta T_\mu\overline{B}\cdot\overline{B}\mathrm{d}x=\lambda\|\Delta T_\mu\overline{B}\|^2+\lambda\mu\|\nabla T_\mu\overline{B}\|^2\geqslant 0,$$

通过 Schwartz 不等式和 Young 不等式，可以得到

$$|\int_\Omega T_\mu(\mathrm{div}\vec{H})\overline{B}\mathrm{d}x|=|\int_\Omega\mathrm{div}\vec{H}\,T_\mu\overline{B}\mathrm{d}x|=|\int_\Omega\vec{H}\nabla T_\mu\overline{B}\mathrm{d}x|\leqslant(\int_\Omega|\vec{H}|^2\mathrm{d}x)^2\cdot(\int_\Omega|\nabla T_\mu\overline{B}|^2\mathrm{d}x)^2\leqslant M_0(\int_\Omega|\overline{B}|^2\mathrm{d}x)^2\cdot(\int_\Omega|\nabla T_\mu\overline{B}|^2\mathrm{d}x)^2\leqslant\frac{1}{M_1}\int_\Omega|\overline{B}|^2\mathrm{d}x+\frac{M_1M_0^2}{4}\int_\Omega|\nabla T_\mu\overline{B}|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{M_1}\int_\Omega|\overline{B}|^2\mathrm{d}x-\frac{M_1M_0^2}{4}\int_\Omega T_\mu\overline{B}\Delta T_\mu\overline{B}\mathrm{d}x=\frac{1}{M_1}\int_\Omega|\overline{B}|^2\mathrm{d}x-\frac{M_1M_0^2}{4}\int_\Omega T_\mu\overline{B}(\mu T_\mu\overline{B}-\overline{B})\mathrm{d}x=\frac{1}{M_1}\int_\Omega|\overline{B}|^2\mathrm{d}x-\frac{M_1M_0^2}{4}\int_\Omega\mu|T_\mu\overline{B}|^2\mathrm{d}x+\frac{M_1M_0^2}{4}\int_\Omega T_\mu\overline{B}\overline{B}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{M_1}\int_\Omega|\overline{B}|^2\mathrm{d}x+\frac{M_1M_0^2}{4}g_\mu(t),$$

结合(2.6)式和上面的估计结果，有

$$g_\mu(t)=2\iint_{Q_t}(\mu T_\mu v-v+T_\mu(\mathrm{div}\vec{H}))\overline{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant 2\mu\iint_{Q_t}(T_\mu v)\overline{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{M_1M_0^2}{2}\int_0^t g_\mu(s)\mathrm{d}s\leqslant\mu\iint_{Q_t}(|T_\mu v|^2+|\overline{B}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{M_1M_0^2}{2}\int_0^t g_\mu(s)\mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

由问题(2.2)的解 $y=T_\mu g$ 易知

$$\int_\Omega|\nabla T_\mu g|^2\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega|T_\mu g|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|g|^2\mathrm{d}x,$$

再由 Sobolev 不等式，得

$$\int_\Omega|T_\mu g|^2\mathrm{d}x\leqslant C_0\int_\Omega|g|^2\mathrm{d}x.$$

根据$\dfrac{\partial^2u}{\partial x_i^{\ 2}}\in L^\infty(Q_T),i=1,2,\cdots,N$，我们知道 $\Delta z=\Delta(u_1-u_2)=\Delta u_1-\Delta u_2$是有界的. 由函数$A(s)$的局部 Lipschite 连续性，知道存在一个正的常数 M 满足

$$|v|=|A(\Delta u_1)-A(\Delta u_2)|\leqslant M|\Delta u_1-\Delta u_2|=M|\Delta z|.$$

因此，由(2.7)式得到

$$g_\mu(t)\leqslant\mu\iint_{Q_t}(C|v|^2+|\overline{B}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{M_1M_0^2}{2}\int_0^t g_\mu(s)\mathrm{d}s\leqslant\mu\iint_{Q_t}(CM^2|\Delta z|^2+|\overline{B}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{M_1M_0^2}{2}\int_0^t g_\mu(s)\mathrm{d}s\leqslant C_1\mu+\frac{M_1M_0^2}{2}\int_0^t g_\mu(s)\mathrm{d}s.$$

根据 Gronwall 不等式得到

$$g_\mu(t)\leqslant C_2\mu,$$

其中C_2是一个仅与M_0,M_1,M,C_0,C_1,T及Ω的测度有关，而与 μ,t 无关的常数. 因此

$$\lim_{\mu\to 0}g_\mu(t)=0,\ \text{a. e. }t\in(0,T),$$

从而得到

$$\overline{B}=B(u_1)-B(u_2)=0,\ \text{a. e. }(x,t)\in Q_T,$$

也就是

$$B(u_1(x,t))=B(u_2(x,t)),\ \text{a. e. }(x,t)\in Q_T.$$

这就完成了定理 1 的证明.

定理 2 如果函数 $\Phi_1(s),\vec{\Phi}_2(s)$ 满足全局 Lipschite 连续性条件，而且集合 $E=\{s;A'(s)=0\}$ 不含有任何内点，那么初边值问题(0.1)～(0.3)至多存在一个广义解.

证明 假设 $u_1,u_2\in L^\infty(Q_T)$ 是初边值问题(0.1)～(0.3)的两个广义解，那么由定理 1 及(2.1)式得到

$$\iint_{Q_T}v\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}\vec{H}\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant(\iint_{Q_T}|\vec{H}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/2}(\iint_{Q_T}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/2}\leqslant M_0(\iint_{Q_T}|\overline{B}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/2}(\iint_{Q_T}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/2}=0,$$

函数 φ 的任意性，说明了在 Q_T几乎处处有

$$v=A(\Delta u_1)-A(\Delta u_2)=0.$$

由于集合$E=\{s;A'(s)=0\}$不含有任何内点，所以$A(s)$是一个严格单调增加的函数，因此在Q_T内几乎处处成立

$$\Delta u_1-\Delta u_2=\Delta(u_1-u_2)=0,$$

也就是几乎处处有

$u_1 - u_2 = 0$.

参考文献：

[1] Chen Y. Uniqueness of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations[M]. In proceedings of the 1982 Changchun Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Beijing: Science Press, 1982: 317-332.

[2] Dong G, Ye Q. On the uniqueness of nonlinear degenerate parabolic equations[J]. Chinese Annals of Math, 1982, 3(3): 279-284.

[3] Wu Z, Yin J. Some properties of functions in BV_x and their applications to the uniqueness of solutions for degenerate quasilinear parabolic equations[J]. Northeastern Math J, 1989, 5(4): 153-165.

[4] Yin J. On the uniqueness and stability of BV solutions for nonlinear diffusion equation[J]. Comm PDE, 1990, 15(12): 1671-1683.

[5] Zhao J. Uniqueness of solutions of the first boundary value problem for quasilinear degenerate parabolic equation[J]. Northeastern Math J, 1985, 1(1): 153-165.

[6] Kobayasi K. The equivalence of week solutions andentropy solutions of nonlinear degenerate second order equations[J]. J Diff Equations, 2003, 189: 383-395.

[7] Wang Z, Yin J. Uniqueness of solutions to a viscous diffusion equation[J]. Appl Math Letters, 2004, 17: 1317-1322.

[8] Quintanilla R. Uniqueness in exterior domains for the generalized heat conduction[J]. Appl Math Letters, 2002, 15: 473-479.

[9] Brézis H, Crandall M G. Uniqueness of theinitial value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$[J]. J Math Pures et Appl, 1979, 58: 153-163.

[10] Stein E, Weiss G. Introduction to fourier analysis on euclidean space[M]. Princeton, N J: Princeton University Press, 1971.

（责任编辑：尹　闯）

（**上接第** 334 **页** Continue from page 334）

参考文献：

[1] Coleman B D, Duffin R J, Mizel V J. Instability, uniqueness and non-existence theorems for the equations, $u_t = u_{xx}-u_{xtx}$ on a strip[J]. Arch Rat Mech Anal, 1965(19): 100-116.

[2] Novick-Cohen, A Pego R L. Stable patterns in a viscous diffusion equation[J]. Trans Math Amer Soc, 1991, 324: 331-351.

[3] Padorn V. Soblev regularization of some nonlinear ill-pose problems[D]. Ph D thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1990.

[4] Barwnblatt G I, Zheltov Ⅳ P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks[J]. J Appl Math Mech, 1960(24): 1286-1303.

[5] Ting T W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction[J]. J Math Anal Appl, 1974, 45: 23-31.

[6] Taylor D W. Research on consolidation of clay[M]. Cambridge Press, 1942.

[7] Guo B L. Initial boundary value problem for one class of system of multidimensional inhomogeneous GBBM equations[J]. Chin Ann of Math, 1987, 8B(2): 226-239.

[8] **郭金勇．一个粘性非线性源的** p-Laplace **发展方程弱解的存在性**[J]．**钦州学院学报**，2006，6：10-13.

[9] **郭金勇．一个粘性非线性源的** p-Laplace **发展方程弱解的唯一性**[J]．**柳州师专学报**，2007(2)：112-114.

（责任编辑：尹　闯）