DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.04.014

广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(4):333～334,338

具非线性源的粘性 p-Laplace 发展方程弱解支集的单调性*

Monotonicity of Support of Weak Solution for a Viscous Laplacian Equation with Nonlinear Source

郭金勇

GUO Jin-yong

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)

(Department of Mathematics and Computer Science,Liuzhou Teachers College,Liuzhou,Guangxi,545004,China)

摘要:考虑具非线性源的粘性 p-Laplace 发展方程的初边值问题,基于比较原理,证明了该方程弱解支集的单调性.

关键词:p-Laplace 发展方程　弱解　支集　单调性

中图法分类号:O175.26　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2011)04-0333-02

Abstract:We analyzed a initial-boundary value problem for viscous p-Laplacian evolution equation with nonlinear source,and proved the monotonicity of the support of weak solutions based on comparison principle.

Key words:p-Laplacian evolution equation,weak solution,support,monotonicity

具有初边值条件的具非线性源的粘性 p-Laplace 发展方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial\Delta u}{\partial t}=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{p-2}u,x\in\Omega,p>2 \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \quad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega, \quad (3)$$

其中 $\Omega\subset R^N$ 为有界区域,$u_0(x)$ 为初值函数,$k>0$ 为粘性系数. $k\frac{\partial\Delta u}{\partial t}$ 表示由于粘性的松驰所产生的效应或粘滞度. 当 $k=0$ 时为已知的具非线性源 p-Laplace 发展方程.

1965 年 B. D. Coleman 等[1]在研究不稳定简单剪切变流的特殊运动状态时,提出伪抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial\Delta u}{\partial t}=\Delta u. \quad (4)$$

此方程还在物理、化学、经济问题和人口问题等许多实际问题中有应用,如包含两种物质的粘性混合物中的相分离模型[2],人口动力学理论[3],剪切多孔介质的液体扩散模型[1,4],热传导模型[5],粘土的加固理论[6]等. 事实上,在考虑到诸如分子和离子效应的多方因素影响时,用非线性关系 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{p-2}u$ 代替方程(4)右端的项 Δu,就可以得到方程(1).

把伪抛物方程(4)进行推广,可以得到 Benjamin-Bona-Mahony(BBM)方程,在高维情形下变为广义 BBM(GBBM)方程. Guo Boling[7]提出并研究了如下 GBBM 方程的初边值问题

$$u_t-\Delta u_t+\nabla\cdot\varphi(u)=f(u). \quad (5)$$

方程(1)具有方程(5)的形式,但研究方法有所不同. 郭金勇用时间离散化方法证明了方程(1)弱解的存在性[8],并进一步证明了弱解的唯一性[9].

本文继续研究方程(1)弱解的其它性质,基于比较原理,证明弱解支集的单调性. 为简便起见,假设 $k=1$. 并考虑问题(1)～(3)的一维情形,即考虑问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial D^2u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(|\frac{\partial u}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x})-|u|^{p-2}u,x\in I=(0,1), \quad (6)$$

$$u(\pm1,t)=0,u_0(x,0)=u_0(x), \quad (7)$$

其中 $p>2$ 为给定的实数,$u_0\in I$ 为非零非负的连续函数,且 $u_0(\pm1)=0$.

引理 1(比较原理)　设 u 是问题(6)～(7)的弱

收稿日期:2011-01-07

作者简介:郭金勇(1962-),男,副教授,主要从事偏微分方程研究。

*广西教育厅科研项目(200911MS294)资助。

解，若在广义函数的意义下，v 满足

$$\frac{\partial v}{\partial t}-k\frac{\partial D^2 v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(|\frac{\partial v}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x})-|v|^{p-2}v,$$

且

$$v(x,0)\leqslant u(x,0),Dv(x,0)\leqslant Du(x,0),$$
$$v(\pm 1,t)\leqslant u(\pm 1,t).$$

则对所有$(x,t)\in Q_T=I\times(0,T)$，有 $v(x,t)\leqslant u(x,t)$.

证明 由弱解的定义，在文献[9]中，对 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$，有

$$\int_\Omega(u_h(x,\tau))_\tau\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega((\nabla u)_h(x,\tau))_\tau\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)_h(x,\tau)\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega(|u|^{p-2}u)_h(x,\tau)\varphi(x)\mathrm{d}x=0,$$

其中 u_h 为 u 的 Steklov 均值，即

$$u_h(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}u(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau,t\in(0,T-h),\\ 0,t>T-h.\end{cases}$$

因此

$$\int_{-1}^1(v(x,\tau)-u(x,\tau))_{h\tau}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1((Dv-Du)_h(x,\tau))_\tau D\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1(|Dv|^{p-2}Dv-|Du|^{p-2}Du)_h(x,\tau)D\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1(|v|^{p-2}v-|u|^{p-2}u)_h(x,\tau)\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$$

对固定的 τ，取 $\varphi(x)=[(v-u)_h]_+$. 由 Steklov 均值性质，注意到 $v(\pm 1,t)\leqslant u(\pm 1,t)$，得知 $\varphi(x)=[(v-u)_h]_+\in W_0^{1,p}(\Omega)$. 把 $\varphi(x)$ 代入上式，得

$$\int_{-1}^1(v(x,\tau)-u(x,\tau))_{h\tau}[(v-u)_h]_+\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 D(v(x,\tau)-u(x,\tau))_{h\tau}D[(v-u)_h]_+\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1[(|Dv|^{p-2}Dv-|Du|^{p-2}Du)_h](x,\tau)D[(v-u)_h]_+\mathrm{d}x-\int_{-1}^1(|v|^{p-2}v-|u|^{p-2}u)_h[(v-u)_h]_+\mathrm{d}x.$$

再关于 τ 在$(0,t)$上积分，得

$$\int_{-1}^1[(v-u)_h]_+^2(x,t)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1|D[(v-u)_h]_+|^2(x,t)\mathrm{d}x-\int_{-1}^1[(v-u)_h]_+^2(x,0)\mathrm{d}x-\int_{-1}^1|D[(v-u)_h]_+|^2(x,0)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1[(|Dv|^{p-2}Dv-|Du|^{p-2}Du)_h]_+(x,\tau)D[(v-u)_h]_+\mathrm{d}x-\int_{-1}^1(|v|^{p-2}v-|u|^{p-2}u)_h(x,\tau)[(v-u)_h]_+\mathrm{d}x. \quad (8)$$

显然

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^1[(v-u)_h]_+(x,0)\mathrm{d}x=0,$$

且

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^1[D(v-u)_h]_+(x,0)\mathrm{d}x=0.$$

在(8)式中令 $h\to 0$，得

$$\int_{-1}^1|(v-u)_+|^2(x,t)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1|D(v-u)_+|^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

即$\int_{-1}^1|(v-u)_+|^2\mathrm{d}x=0$. 因此，$v\leqslant u$.

引理 2 设 u 是问题(6)～(7)的非负弱解，若 $p>2$，则在广义函数的意义下，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}\geqslant-\frac{u}{(p-2)t}.$$

证明 对所有的$(x,t)\in Q_T$，$r\in(\frac{1}{2},1)$，记 $u_r(x,t)=ru(x,r^{p-2}t)$. 显然，u_r 是方程(6)的弱解，且满足下面初边值条件

$$u_r(x,0)=ru_0(x),Du_r(x,0)=rDu_0(x), \quad (9)$$
$$u_r(\pm 1,t)=0. \quad (10)$$

注意到 $r\in(\frac{1}{2},1)$，应用(7)式，(9)式和(10)式，得

$$u_r(x,0)\leqslant u_0(x),Du_r(x,0)\leqslant Du_0(x), \quad (11)$$
$$u_r(\pm 1,t)=u(\pm 1,t). \quad (12)$$

根据比较原理，有

$$u_r(x,t)\leqslant u(x,t). \quad (13)$$

对 $p>2$，由(13)式得

$$\frac{[u(x,\lambda t)]^{p-2}-[u(x,t)]^{p-2}}{\lambda t-t}\geqslant\frac{(1/\lambda-1)[u(x,t)]^{p-2}}{\lambda t-t},$$

其中 $\lambda=r^{p-2}$，令 $\lambda\to 1^-$，在广义函数的意义下得

$$\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]^{p-2}\geqslant-\frac{1}{t}[u(x,t)]^{p-2}.$$

从而推出引理 2 的结论.

定理 1 设 u 是问题(6)～(7)的非负连续弱解，$p>2$，则对所有 s,t 且 $0<s<t$，有

$$\mathrm{supp}\,u(\cdot,s)\subset\mathrm{supp}\,u(\cdot,t).$$

证明 根据引理 2 的结论，在广义函数的意义下有

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^{1/(p-2)}u)\geqslant 0.$$

再由 u 的连续性可知，对所有的 $x\in I$，$t^{1/(p-2)}u$ 是 t 的递增函数. 因此，对 $0<s<t$，有

$$\mathrm{supp}\,u(\cdot,s)\subset\mathrm{supp}\,u(\cdot,t).$$

(下转第 338 页 Continue on page 338)

也就是几乎处处有

$u_1 - u_2 = 0.$

参考文献：

[1] Chen Y. Uniqueness of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations[M]. In proceedings of the 1982 Changchun Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Beijing: Science Press, 1982: 317-332.

[2] Dong G, Ye Q. On the uniqueness of nonlinear degenerate parabolic equations[J]. Chinese Annals of Math, 1982, 3(3): 279-284.

[3] Wu Z, Yin J. Some properties of functions in BV_x and their applications to the uniqueness of solutions for degenerate quasilinear parabolic equations[J]. Northeastern Math J, 1989, 5(4): 153-165.

[4] Yin J. On the uniqueness and stability of BV solutions for nonlinear diffusion equation[J]. Comm PDE, 1990, 15(12): 1671-1683.

[5] Zhao J. Uniqueness of solutions of the first boundary value problem for quasilinear degenerate parabolic equation[J]. Northeastern Math J, 1985, 1(1): 153-165.

[6] Kobayasi K. The equivalence of week solutions andentropy solutions of nonlinear degenerate second order equations[J]. J Diff Equations, 2003, 189: 383-395.

[7] Wang Z, Yin J. Uniqueness of solutions to a viscous diffusion equation[J]. Appl Math Letters, 2004, 17: 1317-1322.

[8] Quintanilla R. Uniqueness in exterior domains for thegeneralized heat conduction[J]. Appl Math Letters, 2002, 15: 473-479.

[9] Brézis H, Crandall M G. Uniqueness of theinitial value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$[J]. J Math Pures et Appl, 1979, 58: 153-163.

[10] Stein E, Weiss G. Introduction to fourier analysis on euclidean space[M]. Princeton, N J: Princeton University Press, 1971.

（责任编辑：尹　闯）

(**上接第** 334 **页** Continue from page 334)

参考文献：

[1] Coleman B D, Duffin R J, Mizel V J. Instability, uniqueness and non-existence theorems for the equations, $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip[J]. Arch Rat Mech Anal, 1965(19): 100-116.

[2] Novick-Cohen, A Pego R L. Stable patterns in a viscous diffusion equation[J]. Trans Math Amer Soc, 1991, 324: 331-351.

[3] Padorn V. Soblev regularization of some nonlinear ill-pose problems[D]. Ph D thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1990.

[4] Barwnblatt G I, Zheltov Ⅳ P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks[J]. J Appl Math Mech, 1960(24): 1286-1303.

[5] Ting T W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction[J]. J Math Anal Appl, 1974, 45: 23-31.

[6] Taylor D W. Research on consolidation of clay[M]. Cambridge Press, 1942.

[7] Guo B L. Initial boundary value problem for one class of system of multidimensional inhomogeneous GBBM equations[J]. Chin Ann of Math, 1987, 8B(2): 226-239.

[8] **郭金勇. 一个粘性非线性源的** p-Laplace **发展方程弱解的存在性**[J]. **钦州学院学报**, 2006, 6: 10-13.

[9] **郭金勇. 一个粘性非线性源的** p-Laplace **发展方程弱解的唯一性**[J]. **柳州师专学报**, 2007(2): 112-114.

（责任编辑：尹　闯）