DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.03.017
广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(3):218~221

信息不完全确定的区间直觉模糊多属性决策方法*

A Method of Multi-criteria Decision-making Based on Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Sets with Incomplete Certain Information

谢海斌,王中兴,唐芝兰
XIE Hai-bin, WANG Zhong-xing, TANG Zhi-lan

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:针对属性权重信息不完全确定且属性值为区间直觉模糊数的多属性决策问题,建立一个基于加权精确度函数的多目标线性规划模型来获取属性权重信息,然后求得每个方案的加权精确度函数,进而根据方案加权精确度函数对方案进行排序,最后通过算例分析说明该方法是有效和实用的.

关键词:多属性决策 属性权重 区间直觉模糊数 精确函数
中图法分类号:C-934 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2011)03-0218-04

Abstract: With regard to the criteria weights with incomplete certain information and the criteria values in form of interval-valued intuitionistic fuzzy numbers in multi-criteria decision-making, a multi-objective linear programming model is constructed based on weight-accuracy function to obtain the weight information, and then the weight-accuracy function is gotten for each alternative. Furthermore, the weight-accuracy function is used to get the priorities of alternatives. Finally, an example is used to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed approach.

Key words: multi-criteria decision-making, criteria weight, interval-valued intuitionistic fuzzy number, accuracy function

Atanassov提出[1,2]的直觉模糊集是对Zadeh提出的模糊集的一种扩充和发展.后来他们又对直觉模糊集进行了扩拓,提出了区间直觉模糊集的概念和运算法则[3,4].区间直觉模糊集的隶属度与非隶属度用区间数来表示,能够更加细腻地描述和刻画事物的模糊性,在处理不确定信息时具有更好的灵活性和实用性,因此,区间直觉模糊多属性决策问题的研究得到了更为广泛的关注[3~10].徐泽水对区间直觉模糊信息的集成方法进行了研究,提出区间直觉模糊数的加权算术平均(IIWAA)算子、加权几何平均(IIWAA)算子以及区间直觉模糊数的得分函数和精确函数的概念[10],并将其应用到区间直觉模糊多属性决策方法中.而近年来,属性权重信息不完全确定的区间直觉模糊多属性决策问题也受到广泛关注[11~14].文献[11]利用加权得分函数建立一个多目标规划模型,通过求解该模型得到相应的属性权重,进而根据各个方案的加权得分函数对方案进行排序。文献[7]通过建立各方案与正负理想方案的灰色关联度最优化模型来获取方案属性权重信息,然后求得各方案与正理想方案相对贴近度,再根据相对贴近度大小对方案进行排序.文献[13]定义区间直觉模糊数的一种信息熵的概念,并利用该信息熵求得方案属性权重,再基于关联度公式求得方案的最优排序.本文针对属性权重信息不完全确定的区间直觉模糊多属性决策问题,基于区间直觉模糊数的精确度函数提出一种新的决策方法,最后给出具体实例分析.

收稿日期:2011-01-07
作者简介:谢海斌(1983-),男,硕士研究生,主要从事优化与决策研究。
*广西自然科学基金项目([桂科自]0991029)资助。

1 区间直觉模糊集基本理论

定义 1.1[1,2] 设 X 是一个非空集合，称 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$ 为直觉模糊集，其中 $\mu_A:X\to[0,1]$ 和 $\nu_A:X\to[0,1]$ 分别称为集合 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度，且满足条件 $0\leqslant \mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1,\ \forall x\in X$，此外，称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 为直觉模糊集 A 中元素的直觉指数，或者称为元素 x 属于 A 的犹豫度，且满足 $0\leqslant \pi_A(x)\leqslant 1,\ \forall x\in X$.

由于客观事物的复杂性和不确定性，$\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 往往难以用精确的数值描述，而用区间数描述比较合适.

定义 1.2[3] 设 X 是一个非空集合，称 $A=\{\langle x,\tilde{\mu}_A(x),\tilde{\nu}_A(x)\rangle \mid x\in X\}$ 为区间直觉模糊集，其中 $\tilde{\mu}_A\subset[0,1]$ 和 $\tilde{\nu}_A\subset[0,1]$，$x\in X$，且满足条件

$$0\leqslant \sup\tilde{\mu}_A(x)+\sup\tilde{\nu}_A(x)\leqslant 1,\ \forall x\in X.$$

为方便，将区间直觉模糊集 A 记为 $A=\{\langle x,[\mu_A^L(x),\mu_A^R(x)],[\nu_A^L(x),\nu_A^R(x)]\rangle \mid x\in X\}$. 显然当 $\mu_A^L(x)=\mu_A^R(x)$，$\nu_A^L(x)=\nu_A^R(x)$ 时，区间直觉模糊集 A 就退化为通常的直觉模糊集.

由定义 1.2 可知，区间直觉模糊集的基本组成部分是由 X 中元素 x 属于 A 的隶属度区间和非隶属度区间组成的有序区间对，称之为区间直觉模糊数[10]. 为方便起见，把区间直觉模糊数的一般形式记为 $([a,b],[c,d])$，其中 $[a,b]\subset[0,1]$，$[c,d]\subset[0,1]$，$b+d\leqslant 1$，且记 Θ 为全体区间直觉模糊数的集合.

定义 1.3[3] 设 $A_1=([a_1,b_1],[c_1,d_1])$ 和 $A_2=([a_2,b_2],[c_2,d_2])$ 是两个区间直觉模糊数，则有：①$A_1\leqslant A_2 \Leftrightarrow a_1\leqslant a_2;b_1\leqslant b_2;c_1\geqslant c_2;d_1\geqslant d_2$，②$A_1=A_2\Leftrightarrow A_1\leqslant A_2$ 且 $A_1\geqslant A_2$.

由定义 1.3 可知，$A^+=([1,1],[0,0])$ 是最大的区间直觉模糊数，$A^-=([0,0],[1,1])$ 是最小的区间直觉模糊数. $A_1=A_2$ 当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$，$c_1=c_2$，$d_1=d_2$.

定义 1.4[10] 设 $A=([a,b],[c,d])$ 是一个区间直觉模糊数，则称

$$S(A)=\frac{a+b-c-d}{2} \tag{1}$$

为 A 的得分函数. 其中，$S(A)\in[-1,1]$. 由文献[10]知 $S(A)$ 的值越大，则相应的区间直觉模糊数 $A=([a,b],[c,d])$ 也越大. 文献[11]利用(1)式构造方案属性的综合评价优化模型来确定属性权重的信息，从而给出方案的最优排序，但是在一些情况下，用(1)式并不能区分区间直觉模糊数的大小，例如对于如下两个区间直觉模糊数

$N_1=([0.3,0.5],[0.2,0.4])$ 和 $N_2=([0.2,0.4],[0.1,0.3])$

利用(1)式计算可得 $S(N_1)=S(N_2)=0.1$，但是考虑到区间直觉模糊数的犹豫度区间是影响其大小的一个因素，犹豫度区间越大，则区间直觉模糊数越小，而 N_1 和 N_2 的犹豫度区间分别为 $[0.1,0.5]$ 和 $[0.3,0.7]$，显然 N_1 比 N_2 更优符合实际情况. 基于此，需要综合考虑区间直觉模糊数的隶属区间和犹豫度区间两个因素.

定义 1.5[15] 设 $A=([a,b],[c,d])$ 是一个区间直觉模糊数，则称

$$M(A)=\frac{a+b-d(1-b)-c(1-a)}{2} \tag{2}$$

为 A 的精确度函数. 其中，$M(A)\in[-1,1]$. 对于任意两个区间直觉模糊数 $A_1=([a_1,b_1],[c_1,d_1])$ 和 $A_2=([a_2,b_2],[c_2,d_2])$，若 $A_1\leqslant A_2$，则 $M(A_1)\leqslant M(A_2)$.

利用(2)式计算上面两个区间模糊数 N_1 和 N_2 的精确度函数值分别为 $M(N_1)=0.23>0.17=M(N_2)$，再根据定义 1.5 可判断 $N_1>N_2$，这符合实际情况.

2 信息不完全确定的区间直觉模糊数的多属性决策方法

对于某区间直觉模糊数多属性决策问题，设有 m 个方案 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，n 个属性 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$，对应的权重向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，且 $w\in H$，$w_j\in[0,1]$. 其中 H 表示权重的不完全确定信息集，可分为 3 类[16]：①$\{w:Bw\geqslant b,w>0,b\geqslant 0\}$；②$\{w:Bw\leqslant b,w>0,b\geqslant 0\}$；③$\{w:Bw=b,w>0,b\geqslant 0\}$. B 是一个 $l\times n$ 矩阵. 方案 A_i 在属性 G_j 下的值为区间直觉模糊数 $\tilde{a}_{ij}=([a_{ij},b_{ij}],[c_{ij},d_{ij}])$，从而得到区间直觉模糊数决策矩阵 $D=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$，再由等式(2)可以求得其对应的精确度函数值矩阵为 $M=(M(\tilde{a}_{ij}))_{m\times n}$.

由定义 1.1 可知，区间直觉模糊数 $\tilde{a}_{ij}=([a_{ij},b_{ij}],[c_{ij},d_{ij}])$ 的隶属区间 $[a_{ij},b_{ij}]$ 和犹豫度区间 $[1-b_{ij}-d_{ij},1-a_{ij}-c_{ij}]$ 表示的物理意义分别为决策者对方案 A_i 关于属性 G_j 的满意程度和不确信程度，而定义 1.5 给出的精确度函数是综合考虑区间直觉模糊数的隶属度和犹豫度得到的，因此决策者对方案 A_i 关于属性 G_j 的优劣评价可以考虑用等式(2)的值

的大小度量.

若属性权重已知,则方案 A_i 的优劣评价主要体现在方案 A_i 关于各属性 G_j 的加权精确度函数之和 $\sum_{j=1}^{n} M(\tilde{a}_{ij}) \circ w_j$ 上. $\sum_{j=1}^{n} M(\tilde{a}_{ij}) \circ w_j$ 越大,对应的方案 A_i 就越优. 若属性权重不完全确定,则可以建立如下基于方案各属性的加权精确度函数最大化的多目标线性优化模型:

$$\begin{cases} \max M(A_i) = \sum_{j=1}^{n} M(\tilde{a}_{ij}) \circ w_j = \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} \dfrac{a_{ij} + b_{ij} - d_{ij}(1 - b_{ij}) - c_{ij}(1 - a_{ij})}{2} w_j, \\ \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ \text{s.t. } w \in H, w_j \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

其中, $M(\tilde{a}_{ij})$ 是对应属性 $\tilde{a}_{ij} = ([a_{ij}, b_{ij}], [c_{ij}, d_{ij}])$ 的精确度函数值,因各方案之间不存在偏好关系,所以上面的多目标优化模型(3)可以转化为如下单目标线性最优化模型:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{m} M(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M(\tilde{a}_{ij}) w_j = \\ \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{a_{ij} + b_{ij} - d_{ij}(1 - b_{ij}) - c_{ij}(1 - a_{ij})}{2} \\ w_j \text{ s.t. } w \in H, w_j \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

通过求解该优化模型就可以得到方案最优属性权重向量.

求解属性值为区间直觉模糊数且属性权重信息不确定的多属性决策问题的具体步骤:

步骤1　决策者对方案 A_i 关于属性 G_j 进行测度,给出方案 A_i 在属性 G_j 下的属性值为区间直觉模糊数 $\tilde{a}_{ij} = ([a_{ij}, b_{ij}], [c_{ij}, d_{ij}])$,从而构成区间直觉模糊数决策矩阵 $D = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$;

步骤2　根据等式(2)求得决策矩阵 $D = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ 对应的精确度函数矩阵 $M = (M(\tilde{a}_{ij}))_{m \times n}$;

步骤3　利用最优化模型(4)求得方案属性的最优权重向量为 $w^* = (w_1^*, w_2^*, \cdots, w_n^*)^{\mathrm{T}}$,并结合等式(3)求得各方案的加权精确度函数值 $M(A_i)$;

步骤4　根据加权精确度函数值 $M(A_i)$ 大小对方案 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 进行排序.

3　实例分析

为比较方便,采用文献[12]中给出的数据进行算例分析,不妨设有4个备选方案 A_1, A_2, A_3 和 A_4, 3个评价属性 G_1, G_2 和 G_3,备选方案的属性都是效益型属性且属性权重信息不完全给出. 设 $H = \{0.15 \leqslant w_1 \leqslant 0.25, 0.15 \leqslant w_2 \leqslant 0.35, 0.3 \leqslant w_3 \leqslant 0.45, 4w_1 \leqslant w_3, \sum_{j=1}^{3} w_j = 1\}$,每个备选方案对属性的满足程度用区间直觉模糊数表示,所得的区间直觉模糊数评价矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} ([0.4,0.5],[0.3,0.4]) & ([0.4,0.6],[0.2,0.4]) & ([0.1,0.3],[0.5,0.6]) \\ ([0.6,0.7],[0.2,0.3]) & ([0.6,0.7],[0.2,0.3]) & ([0.4,0.7],[0.1,0.2]) \\ ([0.3,0.6],[0.3,0.4]) & ([0.5,0.6],[0.3,0.4]) & ([0.5,0.6],[0.1,0.3]) \\ ([0.7,0.8],[0.1,0.2]) & ([0.6,0.7],[0.1,0.3]) & ([0.3,0.4],[0.1,0.2]) \end{pmatrix}.$$

利用本文的方法给出具体的计算步骤:

步骤1　建立区间直觉模糊数决策矩阵 $D = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n} = (([a_{ij}, b_{ij}], [c_{ij}, d_{ij}]))_{m \times n}$;

步骤2　根据等式(2)可以求得决策矩阵 $D = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ 对应的精确度函数值矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 0.260 & 0.36 & -0.235 \\ 0.565 & 0.565 & 0.490 \\ 0.265 & 0.395 & 0.465 \\ 0.715 & 0.585 & 0.255 \end{pmatrix};$$

步骤3　根据模型(4)建立单目标线性最优化模型

$$\begin{cases} \max M = 1.805 w_1 + 1.905 w_2 + 0.975 w_3 \\ \text{s.t. } w \in H. \end{cases}$$

求解该最优化模型得到最优解为 $w^* = (0.25, 0.35, 0.40)^{\mathrm{T}}$,从而求得各方案的加权精确度函数值为 $M(A_1) = 0.097$, $M(A_2) = 0.535$, $M(A_3) = 0.391$, $M(A_4) = 0.486$;

步骤4　根据 $M(A_i)$ 大小对方案 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 进行排序,排序结果为 $A_2 > A_4 > A_3 > A_1$.

该结果不仅与文献[12]中给出的排序结果保持一致,也与采用文献[11,15]中的方法得到的结果一致.

4　结束语

本文研究了属性权重信息不完全确定的模糊多属性决策问题. 基于方案属性加权精确度函数越大方案越优原则,建立一个多目标线性最优化模型来确定方案属性权重信息,从而求得每个方案的加权精确度函数并通过比较各方案的加权精确度函数大小确定方案的排序. 实例分析说明该方法是合理有效的.

参考文献:

[1]　Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets

and Systems, 1986, 20: 87-96.
[2] Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33: 37-46.
[3] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 343-349.
[4] Atanassov K. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64: 159-174.
[5] Wei G W. Maximizing deviation method for multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy setting[J]. Knowledge-Based Systems, 2008, 21: 833-836.
[6] Ye J. Fuzzy decision-making methods based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 205: 202-204.
[7] Wei G W. GRA method for multiple attribute decision making with incomplete weight information in intuitionistic fuzzy setting[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23: 243-247.
[8] Li D F. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2005, 70: 73-85.
[9] Lin L, Yuan X H, Xia Z Q. Multicriteria fuzzy decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2007, 73: 84-88.
[10] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
[11] 卫贵武. 一种权重信息不完全的区间直觉模糊数多属性决策方法[J]. 统计与决策, 2008, 8: 70-71.
[12] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method based on a novel accuracy function under interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36: 6899-6902.
[13] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method using entropy weights-based correlation coefficients of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(12): 3864-3870.
[14] Ye F. An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37: 7050-7055.
[15] Lakshmana G N V, Muralikrishnan S, Sivaraman G. Multi-criteria decision-making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(3): 1464-1467.
[16] 刘锋, 袁学海. 模糊数直觉模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88-91.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 217 页 Continue from page 217)

[3] Joubert W. On the convergence behavior of the restarted GMRES algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. Numer Linear Algebra Appl, 1994, 1: 427-448.
[4] Cao Z H. A note on the convergence behavior of GMRES[J]. Appl Numer math, 1997, 25: 13-20.
[5] Van der Vorst H A, Vuik C. The superlinear convergence behavior of GMRES[J]. J Comput Appl Math, 1993, 48: 327-341.
[6] Arnoldi W E. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eignvalue problem[J]. Quart Appl Math, 1951, 9: 17-29.
[7] Simoncini V. A new variant of restarted GMRES[J]. Numer Linear Algebra Appl, 1999, 6: 61-77.
[8] 全忠, 向淑晃. 基于 GMRES 的多项式预处理广义极小残差法[J]. 计算数学, 2006, 4: 365-376.
[9] Morgan R B. A restarted GMRES method augmented with eigenvectors[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1995, 16: 1154-1171.

(责任编辑: 尹 闯)