

# Banach 空间中 $K$ -严格凸的等价刻画<sup>\*</sup>

## Equivalent Characterizations about $K$ -Strictly Convex in Banach Space

张吉超<sup>1</sup>, 魏文展<sup>2</sup>, 马百万<sup>1</sup>

ZHANG Ji-chao<sup>1</sup>, WEI Wen-zhan<sup>2</sup>, MA Bai-wan<sup>1</sup>

(1. 广西师范学院数学科学学院, 广西南宁 530023; 2. 广西经贸职业技术学院, 广西南宁 530021)

(1. College of Mathematical Science, Guangxi Teachers' University, Nanning, Guangxi, 530023, China; 2. Guangxi Economic and Trade Polytechnic, Nanning, Guangxi, 530021, China)

**摘要:** 利用类似于 Banach 空间严格凸等价刻画时的方法, 给出 Banach 空间  $K$ -严格凸的一些性质, 当  $X, Y$  都是 Banach 空间时, 给出直和  $X \oplus Y$  是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的 1 个充分条件, 以及直和  $X \oplus Y$  空间是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的 2 个充要条件.

**关键词:** Banach 空间  $K$ -严格凸 直和

**中图法分类号:** O177 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2011)03-0207-04

**Abstract:** Some qualities about  $K$ -strictly convex in Banach space are given by the ways of the similar equivalent characterizations about strictly convex in Banach space. When  $X, Y$  is Banach space, one new sufficient condition and two new sufficient and necessary conditions are given simultaneously for the direct sum  $X \oplus Y$  space to be  $K_1 + K_2 + 1$ -strictly convex.

**Key words:** Banach space,  $K$ -strictly convex, direct sum

自从波兰数学家 S. Banach 提出 Banach 空间以来, 该空间理论就一直备受关注. 文献[1]给出了 Banach 空间严格凸的定义, 文献[2]给出其  $K$ -严格凸的定义, 文献[1, 3]又证明文献[1]给出的严格凸定义是等价的, 文献[4, 5]证明文献[2]给出的  $K$ -严格凸的定义是等价的. 本文在此基础上进一步刻画了  $K$ -严格凸的几何性质, 讨论了直和  $X \oplus Y$  空间的  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸性, 并给出直和  $X \oplus Y$  空间是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的 2 个充要条件. 这些充要条件比原来的条件使用起来更为方便.

### 1 预备知识

本文所涉及空间均为实 Banach 空间,  $X^*, Y^*$  分别为  $X, Y$  的对偶空间,

$$S(X) = \{x: x \in X, \|x\| = 1\}; S(Y) = \{y: y$$

收稿日期: 2011-01-07

作者简介: 张吉超(1982-), 男, 硕士研究生, 主要从事泛函分析空间理论研究.

\* 广西自然科学基金项目[桂科自 0728050]资助.

$$\in Y, \|y\| = 1\}. \quad (1)$$

**定义 1.1**<sup>[1]</sup> 设  $X$  是 Banach 空间,  $X$  称为严格凸的, 如果对任意  $x \in S(X), y \in S(X), x \neq y$  时,

$$\| \frac{x+y}{2} \| < 1.$$

容易证明,  $X$  是严格凸的当且仅当对任意  $x, y \in X$  且  $x$  与  $y$  不共线时  $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$ .  $X$  是严格凸的, 当且仅当对任意  $x \in S(X), y \in S(X)$ , 若  $\|x+y\| = 2$  时, 就有  $x, y$  线性相关.

**定义 1.2**<sup>[2]</sup> 称 Banach 空间  $X$  是  $K$ -严格凸的, 若对  $X$  中任意  $K+1$  个元素  $x_1, x_2, \dots, x_{K+1}$ , 当  $\|x_1 + x_1 + \dots + x_{K+1}\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_{K+1}\|$ , 就有  $x_1, x_2, \dots, x_{K+1}$  线性相关. 特别地称 Banach 空间  $X$  是  $K$ -严格凸的, 当且仅当对  $X$  中任意  $K+1$  个元素  $x_1, x_2, \dots, x_{K+1} \in S(X)$ , 当  $\|x_1 + x_1 + \dots + x_{K+1}\| = K+1$  时, 就有  $x_1, x_2, \dots, x_{K+1}$ , 线性相关.

容易证明 Banach 空间  $X$  是  $K$ -严格凸的, 当且仅当对  $X$  中任意线性无关组  $x_1, x_2, \dots, x_{K+1} \in X$ , 时, 就有

$$\|x_1 + x_1 + \dots + x_{k+1}\| < \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_{k+1}\|.$$

**定义 1.3**<sup>[1]</sup> 设  $X$  是 Banach 空间,  $X^*$  是  $X$  的对偶空间, 由

$$J_x = \{f \in X^* : f(x) = \|x\|^2, \|f\| = \|x\|\}$$

所定义的映照  $J: X \rightarrow 2^{X^*}$  称为  $X$  上的正规对偶映, 任一  $f_x \in J_x$  称为  $x$  的支撑泛函.

**定义 1.4**<sup>[9]</sup> 设  $V_1, V_2$  是线性空间  $V$  的子空间, 如果  $V_1 + V_2$  中每个向量  $a$  的分解式  $a = a_1 + a_2, a_1 \in V_1, a_2 \in V_2$  是唯一的, 这个和就称为直和.

**引理 1.1**<sup>[4]</sup> 设  $X$  是 Banach 空间,  $X$  是  $K$ -严格凸的, 当且仅当对  $X$  中任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_k \in S(X)$ , 及任意  $0 \neq f \in X^*$  时, 有

$$\|f(x_0 + x_1 + \dots + x_k)\| < (K+1)\|f\|.$$

**引理 1.2**<sup>[4]</sup> 设  $X$  是 Banach 空间,  $X$  是  $K$ -严格凸的, 当且仅当对  $X$  中任意线性无关组  $x, y^1, y^2, \dots, y_k \in S(X)$ , 有

$$K - f(y_1 + y_1 + \dots + y_k) > 0, \forall f \in J_x, \|f\| = 1.$$

## 2 主要结论

**定理 2.1**  $X$  是 Banach 空间, 则下列命题等价:

(1)  $X$  是  $K$ -严格凸的.

(2) 对每个  $p, 1 < p < \infty$ , 对任意  $x_0, x_1, \dots, x_k \in X$ , 当  $x_0, x_1, \dots, x_k$  线性无关时, 有

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{k+1} \right\|^p < \frac{1}{k+1} (\|x_0\|^p + \|x_1\|^p + \dots + \|x_k\|^p).$$

(3) 存在某个  $p, 1 < p < \infty$ , 对任意  $x_0, x_1, \dots, x_k \in X$ , 当  $x_0, x_1, \dots, x_k$  线性无关时, 有

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{k+1} \right\|^p <$$

$$\frac{1}{k+1} (\|x_0\|^p + \|x_1\|^p + \dots + \|x_k\|^p).$$

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2). 设  $X$  是  $K$ -严格凸的, 对任意  $x_0, x_1, \dots, x_k \in X$ , 且  $x_0, x_1, \dots, x_k$  是线性无关的, 可知

$$\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| < \|x_0\| + \|x_1\| + \dots + \|x_k\|.$$

对于每个  $p, 1 < p < \infty$  时, 函数  $f(t) = t^p$  是凸函数, 因此有

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{k+1} \right\|^p <$$

$$\left( \frac{\|x_0\| + \|x_1\| + \dots + \|x_k\|}{k+1} \right)^p \leq \frac{1}{k+1} (\|x_0\|^p +$$

$$\|x_1\|^p + \dots + \|x_k\|^p),$$

即结论

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{k+1} \right\|^p < \frac{1}{k+1} (\|x_0\|^p +$$

$$\|x_1\|^p + \dots + \|x_k\|^p)$$

成立.

(2)  $\Rightarrow$  (3) 显然成立.

(3)  $\Rightarrow$  (1). 当  $\|x_0\| = \|x_1\| = \dots = \|x_k\| = 1$  时, 且  $x_0, x_1, \dots, x_k$  线性无关时, 由条件可知

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{k+1} \right\|^p < \frac{1}{k+1} (\|x_0\|^p +$$

$$\|x_1\|^p + \dots + \|x_k\|^p) < 1,$$

则

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{k+1} \right\|^p < 1.$$

从而  $\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| < k+1$ , 所以  $X$  是  $K$ -严格凸的.

**定理 2.2** 设  $X$  是 Banach 空间,  $X$  是  $K$ -严格凸的, 当且仅当对任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_k \in S(X)$ , 和  $a_i \in (0, 1), i = 0, 1, \dots, k$ , 且  $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1$ , 有

$$\|a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k\| < 1.$$

**证明** 必要性. 设  $X$  是  $K$ -严格凸的, 故对任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_k \in S(X)$  时, 有  $\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| < K+1$ , 而  $a_i \in (0, 1), a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1$ , 不妨令  $a^0 = \min a_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $a^0 = 1 - a^1 - a^2 - \dots - a^k$ , 因此

$$\begin{aligned} \|a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k\| &= \|a_0(x_0 + x_1 + \dots + x_k) + (a_1 - a_0)x_1 + (a_2 - a_0)x_2 + \dots + (a_k - a_0)x_k\| \\ &\leq a^0 \|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| + (a_1 - a^0)\|x_1\| + (a_2 - a^0)\|x_2\| + \dots + (a_k - a^0)\|x_k\| \\ &< a^0(K+1) + (a_1 - a^0) + (a_2 - a^0) + \dots + (a_k - a^0) = 1, \end{aligned}$$

即结论  $\|a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k\| < 1$  成立. 反之, 对任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_k \in S(X)$ , 和  $a_i \in (0, 1), i = 0, 1, \dots, k$ , 且  $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1$ , 若  $\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| = K+1$ , 从而

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{k+1} \right\| = 1.$$

由  $a_i \in (0, 1)$ , 且  $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1$ , 不妨令  $a^0 = a_1 = \dots = a_k = \frac{1}{K+1}$ , 则

$$\|a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k\| = \left\| \frac{x_0}{K+1} +$$

$$\frac{x_1}{K+1} + \dots + \frac{x_k}{K+1} \right\| = \frac{1}{K+1} \|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| = 1,$$

与条件相矛盾,因此  $\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| < K + 1$ , 从而  $X$  是  $K$ -严格凸的.

**定理 2.3** 设  $X$  是 Banach 空间,  $X$  是  $K$ -严格凸的, 当且仅当  $X$  上的任意连续线性泛函在  $S(X)$  上至多  $K$  个点处达到它的范数(极大值).

**证明** 设  $X$  是  $K$ -严格凸的, 对任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_k \in S(X)$ , 有

$$\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| < K + 1.$$

假如存在  $f \in X^*$  和  $x_0, x_1, \dots, x_k$  使得

$$f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_k) = \|f\| = \max \langle f, x \rangle,$$

则由  $f$  的线性性得

$$f\left(\frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{K + 1}\right) = \frac{1}{K + 1}(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_k)) = \|f\|.$$

从而可得

$$\left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{K + 1} \right\| = 1,$$

即  $\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| = K + 1$ , 与条件矛盾. 反之, 对任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_k \in S(X)$ , 假如  $\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| = K + 1$ , 可得

$$\frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{K + 1} \in S(X).$$

因此由 Hahn - Banach 延拓定理得: 存在  $f \in X^*$ ,  $\|f\| = 1$ , 使得

$$f\left(\frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{K + 1}\right) = \left\| \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{K + 1} \right\| = 1,$$

而  $1 = f\left(\frac{x_0 + x_1 + \dots + x_k}{K + 1}\right) = \frac{1}{K + 1}(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_k)) \leq \frac{1}{K + 1}(\|f(x_0)\| + \dots + \|f(x_k)\|) \leq 1$ , 由于

$\|f(x_0)\| \leq 1, \|f(x_1)\| \leq 1, \dots, \|f(x_k)\| \leq 1$ , 所以  $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_k) = 1$ , 即  $f$  在  $K + 1$  个点上达到它的范数, 与条件相矛盾, 故结论成立.

**定理 2.4** 设  $X, Y$  都是 Banach 空间, 且  $X$  是  $K_1$ -严格凸的,  $Y$  是  $K_2$ -严格凸的, 则直和  $X \oplus Y$  是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的.

**证明**  $X, Y$  都是 Banach 空间, 显然直和  $X \oplus Y$  也是 Banach 空间. 又由于  $X$  是  $K_1$ -严格凸的,  $Y$  是  $K_2$ -严格凸的, 则对任意  $X$  中的线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1} \in X$ ,  $Y$  中的线性无关组  $y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in Y$ , 有

$$\|x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}\| < \|x_0\| + \|x_1\| + \dots + \|x_{k_1}\|,$$

$$\|y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}\| < \|y_0\| + \|y_1\| + \dots + \|y_{k_2}\|.$$

而  $X \oplus Y$  是直和, 则任意  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1}, y_0, y_1, \dots, y_{k_2}$  在直和  $X \oplus Y$  空间中线性无关, 因此  $\|x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1} + y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}\| < \|x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}\| + \|y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}\| < \|x_0\| + \|x_1\| + \dots + \|x_{k_1}\| + \|y_0\| + \|y_1\| + \dots + \|y_{k_2}\|$ , 故结论成立.

**推论 2.1**  $X_n, n = 1, 2, \dots$  都是 Banach 空间, 且  $X_n$  分别是  $K_n$ -严格凸的, 则  $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$  是  $K_1 + K_2 + \dots + K_n + n - 1$ -严格凸的.

**注** 若直和  $X \oplus Y$  是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸, 并不能推出  $X$  是  $K_1$ -严格凸,  $Y$  是  $K_2$ -严格凸, 并且  $X$  是  $K_1$ -严格凸, 也不能推出  $Y$  是  $K_2$ -严格凸, 同样  $Y$  是  $K_2$ -严格凸的, 也不能推出  $X$  是  $K_1$ -严格凸.

**定理 2.5**  $X, Y$  都是 Banach 空间, 且  $X$  是  $K_1$ -严格凸的(或者  $Y$  是  $K_2$ -严格凸的), 则直和  $X \oplus Y$  是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的, 当且仅当对任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1} \in S(X)$ (或者  $y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in S(Y)$ ) 及任意  $0 \neq f \in X^*, 0 \neq g \in Y^*$ , 有

$$\|f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}) + g(y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2})\| < (K_1 + 1)\|f\| + (K_2 + 1)\|g\|.$$

**证明** 由  $X$  是  $K_1$ -严格凸的, 直和  $X \oplus Y$  是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的, 对任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1}, y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in S(X \oplus Y)$ , 其中  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1} \in S(X)$ , 则任意  $0 \neq f \in X^*$ , 有

$$\|f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1})\| < (K_1 + 1)\|f\|.$$

因此  $\|f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}) + g(y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2})\| \leq \|f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1})\| + \|g(y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2})\| < (K_1 + 1)\|f\| + (K_2 + 1)\|g\|$ , 从而结论成立. 反之, 对任何线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1}, y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in S(X \oplus Y)$ , 其中  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1} \in S(X)$ , 若

$\|x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1} + y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}\| = K_1 + K_2 + 2$ , 由 Hahn - Banach 延拓定理得: 存在  $h \in (X \oplus Y)^*$ , 使得

$$\|h(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1} + y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2})\| = \|h(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}) + h(y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2})\| = K_1 + K_2 + 2. 另一方面, 由  $0 \neq f \in X^*, 0 \neq g \in Y^*$  的任意性, 不妨令  $f = g = h$ , 且  $\|f\| = \|g\| = \|h\| = 1$ , 则  $\|f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}) + g(y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2})\| = \|h(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}) + h(y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2})\| < (K_1 + 1)\|h\| + (K_2 + 1)\|h\| = K_1 + K_2 + 2$ , 与前面相矛盾, 故直和  $X \oplus Y$  是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸$$

的。

**推论 2.2**  $X_n, n = 1, 2, \dots$  都是 Banach 空间,  $X_1$  是  $K_1$ -严格凸的(或者  $X_2$  是  $K_2$ -严格凸的,  $\dots$ , 或者  $X_n$  是  $K_n$ -严格凸的) 则直和  $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$  空间是  $K_1 + K_2 + \dots + K_n + n - 1$ -严格凸的, 当且仅当对任意线性无关组  $x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1k_1}, x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2k_2}, \dots, x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{nk_n} \in S(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)$ , 其中  $x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1k_1} \in S(X_1)$  (或者  $x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2k_2} \in S(X_2)$ ,  $\dots$ , 或者  $x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{nk_n} \in S(X_n)$ ),  $i = 1, 2, \dots$ , 及任意  $f_1 \in X_1^*, f_2 \in X_2^* \dots f_n \in X_n^*$ , 有  $\|f_1(x_{10} + x_{11} + \dots + x_{1k_1}) + f_2(x_{20} + x_{21} + \dots + x_{2k_2}) + \dots + f_n(x_{n0} + x_{n1} + \dots + x_{nk_n})\| < (K_1 + 1)\|f_1\| + (K_2 + 1)\|f_2\| + \dots + (K_n + 1)\|f_n\|$ .

**定理 2.6**  $X, Y$  都是 Banach 空间, 且  $X$  是  $K_1$ -严格凸的(或者  $Y$  是  $K_2$ -严格凸的), 则直和  $X \oplus Y$  空间是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的, 当且仅当对任意直和  $X \oplus Y$  空间中线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1}, y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in S(X \oplus Y)$ , 其中  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1} \in S(X)$  (或者  $y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in S(Y)$ ), 有

$$K_1 + K_2 - f(x_1 + x_2 + \dots + x_{k_1}) - g(y_1 + y_2 + \dots + y_{k_2}) > 0,$$

其中  $f \in J_x, g \in J_y, \|f\| = 1, \|g\| = 1$ .

**证明** 不妨设  $X$  是  $K_1$ -严格凸的, 对直和  $X \oplus Y$  空间中任意线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1}, y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in S(X \oplus Y)$ , 其中  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1} \in S(X)$ , 则  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1} \in S(X)$ , 也是线性无关的, 所以  $K_1 + K_2 - f(x_1 + x_2 + \dots + x_{k_1}) - g(y_1 + y_2 + \dots + y_{k_2}) = K_1 + 1 - f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}) + K_2 + 1 - g(y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}) > K_1 + 1 - \|x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1}\| + K_2 +$

$1 - \|y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}\| > 0$ . 反之, 假若直和  $X \oplus Y$  不是  $K_1 + K_2 + 1$ -严格凸的, 则存在直和  $X \oplus Y$  中线性无关组  $x_0, x_1, \dots, x_{k_1}, y_0, y_1, \dots, y_{k_2} \in S(X \oplus Y)$ , 使得

$$\|x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1} + y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}\| = K_1 + K_2 + 2.$$

取  $x = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1} + y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}}{K_1 + K_2 + 2}$ , 其中任意  $f \in J_{X \oplus Y}, \|f\| = 1, \|f\| = \|x\|, f(x) = 1$ , 则  $f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1} + y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}) = K_1 + K_2 + 2$ , 由  $f, g$  的任意性, 不妨令  $f = g$ , 所以  $K_1 + K_2 - f(x_1 + x_2 + \dots + x_{k_1}) - g(y_1 + y_2 + \dots + y_{k_2}) = K_1 + K_2 + 2 - f(x_0 + x_1 + \dots + x_{k_1} + y_0 + y_1 + \dots + y_{k_2}) = 0$ , 与条件相矛盾, 故结论成立。

### 参考文献

- [1] 游兆永, 龚怀云, 徐宗本. 非线性分析[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.
- [2] 俞鑫泰. Banach 几何空间理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1984.
- [3] 肖应雄. Banach 空间严格凸的几个等价命题[J]. 柳州师专学报, 2003, 9(3): 32-32.
- [4] 邱孝君.  $K$ -严格凸空间的一些性质[J]. 辽宁师范大学自然科学学报, 1991, 14(1): 14-16.
- [5] 南朝勋, 王建华.  $K$ -严格凸性与  $K$ -光滑性[J]. 数学年刊, 1990, 11A(3): 21-24.
- [6] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

(责任编辑: 尹 闯)

## 科学家开发出新型荧光标记工具

1962 年科学家们首先在水母体内发现了绿色荧光蛋白 (GFP), 从那以后, 这种神奇的蛋白质成为生物学功能研究的重要工具之一。在绿色荧光蛋白的帮助下, 研究人员不仅能够成像观测基因表达和蛋白质动态, 还可以检测细胞内离子和小分子浓度、酶活性, 标记细胞或分子亚群, 实现复杂的动力学时空分析。这一突破性的科学成果以其在后续数十年的生命科学研究中发挥的巨大作用, 而获得了 2008 年度的诺贝尔化学奖。最近美国科研人员利用 RNA 能够折叠形成复杂三维形状的特性, 成功构建出“RNA-荧光基因”复合物, 并命名为“Spinach”。这种被命名为“Spinach”的 RNA-荧光基因复合物是一种可以跟 GFP 蛋白媲美的新型荧光工具, 可用于追踪细胞内各种 RNA 的功能动态。

目前在生物学中还存在大量围绕 RNA 的谜题, 科学家们希望通过 Spinach 能够更深入地了解细胞中的 RNA 运输机制, 以及它们在疾病中的受累情况。这一新技术将帮助科学家们揭开与人类生命活动及疾病相关的 RNA 的神秘面纱。

(据科学网)