DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.03.027
广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(3):201~206

局部凸空间的平均局部一致凸性和一致光滑性

Average Locally Uniform Convexity and Uniform Smoothness in Locally Convex Spaces

林尤武[1],魏文展[2],唐献秀[3],吴建功[1]
LIN You-wu[1], WEI Wen-zhan[2], TANG Xian-xiu[3], WU Jian-gong[1]

(1.广西师范学院师园学院理科教学部,广西南宁 530001;2.广西经贸职业技术学院,广西南宁 530021;3.广东石油化工学院理学院,广东茂名 525000)
(1.Department of Science, Shiyuan College of Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530001, China; 2. Guangxi Economic Trade Polytechnic, Nanning, Guangxi, 530021, China; 3. College of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming, Guangdong, 525000, China)

摘要:引进局部凸空间平均局部一致凸性的概念,给出其对偶的定义,即局部凸空间平均局部一致光滑性,并在 P-自反的条件下得到它们之间的对偶定理,即(X,P)是平均局部一致凸(平均局部一致光滑)的当且仅当(X',P')是平均局部一致光滑(平均局部一致凸)的.
关键词:局部凸空间 平均局部一致凸性 平均局部一致光滑性 对偶关系 P-自反
中图法分类号:O177 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2011)03-0201-06

Abstract: The definition of average locally uniform convexity in locally convex spaces is introduced, and we give the definition of average locally uniform smoothness in locally convex spaces as the dual of average locally uniform convexity. In addition, on the conditions of P-reflexivity, we obtained the dual relations between average locally uniform convexity and average locally uniform smoothness. Also, (X, P) is average locally uniform convexity (average locally uniform smoothness) if and only if (X', P') is average locally uniform smoothness (average local uniform convexity).

Key words: locally convex spaces, average locally uniform convexity, average locally uniform smoothness, dual theorem, P-reflexivity

1977年Diminnie等[1]引进局部凸空间严格凸的概念.接着国起等[2]又给出与文献[1]等价的严格凸,并给出了局部凸空间严格凸的对偶,即局部凸空间光滑的概念,还建立了它们之间的某种对偶关系.随后他们又在文献[3]中给出一致凸的局部凸空间的概念.1995年,白国仲[4]在Banach空间引进了平均一致凸和平均局部(平均弱局部)一致凸,并且证明平均一致凸性及空间的自反性与最佳逼近问题都有着密切的联系.文献[5]将这种凸性推广到了局部凸空间,给出平均一致光滑性的概念,并建立了它们之间的某种对偶关系.本文将Banach空间的平均局部一致凸性推广到局部凸空间,给出平均一致光滑性的概念,并且建立了它们在 P-自反的条件下具有对偶关系.

1 相关定义及引理

设 X 是实线性空间,P 是 X 上的一族半范数,且满足 $\bigcap_{p\in P} p^{-1}(0)=0$,其中 $p^{-1}(0)=\{x\in X: p(x)=0\}$(这样的半范数族 P 常称为分离的).令 T_P 是半范数族 P 生成的 X 上的局部凸拓扑,则(X, T_P)是局部凸 Hausdorff 空间,简称局部凸空间.此时称(X,P)为一个 Hausdorff 偶对,简称偶对.以下凡是提到局部凸空间(X, T_P)时,总意味着 T_P 是由 X 上的某一分离的半范数族 P 生成的.

收稿日期:2011-01-07
作者简介:林尤武(1984-),男,硕士,主要从事泛函分析方向的研究。

对每个$p \in P$,考虑半范空间(X, p). 用$(X, p)'$表示(X, p)上连续线性泛函全体作成的对偶空间,其中范数定义为 $\|f\|_p' = \sup_{p(x)\leqslant 1} |f(x)|$, $\forall f \in (X, p)'$. 则$(X, p)'$按范数 $\|\circ\|_p'$ 是一个 Banach 空间[6].

用 $X' = (X, T_P)'$ 表示(X, T_P)的拓扑对偶空间,并且对每个 $p \in P$,考虑 X' 的线性子空间 $X'(p) = \{f \in X' : \sup_{p(x)\leqslant 1} |f(x)| < +\infty\}$.

再引入几个常用的记号:

对任意$p \in P$,令$U_p(X) = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$, $S_p(X) = \{x \in X : p(x) = 1\}$,即$U_p(X)$和$S_p(X)$分别表示半范空间$(X, p)$中的单位球和单位球面.

$S(X'(p)) = \{f \in X'(p) : \|f\|_p' = \sup_{p(x)\leqslant 1} |f(x)| = 1\}$, $U(X'(p)) = \{f \in X'(p) : \|f\|_p' = \sup_{p(x)\leqslant 1} |f(x)| \leqslant 1\}$,

对任意 $p \in P$, $x \in S_p(X)$, 令 $\sum_p(x) = \{f \in X'(p) : \|f\|_p' = 1$ 且 $f(x) = 1\}$,由 Hahn-Banach 定理知道$\sum_p(x)$是非空的.

对任一正数族$\{C_p > 0 : p \in P\}$,记$B\{C_p\} = \{x \in X : p(x) \leqslant C_p, p \in P\}$,易知$B\{C_p\}$是$(X, T_P)$中的绝对凸有界闭集. 对每个$B\{C_p\}$,定义$X'$上的半范数如下[2]: $p'_{B\{C_p\}}(f) = \sup_{x\in B\{C_p\}} |f(x)|$(任意的$f \in X'$),并且称 $p'_{B\{C_p\}}$ 是由$B\{C_p\}$决定的半范数. 记 P' 是形如$p'_{B\{C_p\}}$ 的半范数的全体,容易验证 P' 生成的 X' 上的局部凸拓扑恰好就是X' 上的强拓扑$(X', T_{P'})$. 对上述X' 的半范数p',考虑任一正数族$\{C_{p'} > 0 : p' \in P'\}$. 记$B\{C_{p'}\} = \{f \in X' ; p'(f) \leqslant C_{p'}, p' \in P'\}$,对每个$B\{C_{p'}\}$,在$X'' = (X', T_{p'})'$上定义半范数 $p''_{B\{C_{p'}\}}(F) = \sup_{f\in B\{C_{p'}\}} |F(f)|$(任意的$F \in X''$),则形如$p''_{B\{C_{p'}\}}$ 的半范数的全体 P'' 生成 X'' 上的强拓扑$(X'', T_{P''})$. 我们还知道[7] $X'' = (X, T_{P''})'$,若记$J : X \to X''$,其中$Jx = \hat{x}$,任意的$x \in X$,显然$J(X) = \hat{x}$,其中$\hat{x} = \{x \in X'' : x \in X\}$,因而$J(X) \subset X''$.

定义 **1.1**[7] 设P是实线性空间X上的一族半范数,B是(X, T_P)中形如$B\{C_p\}$的绝对凸有界闭集,若存在$p \in P$,有$C_p = 1$,则称相应的$B\{C_p\}$为一个p-正规集. 为方便起见,在下文中常用一个字母B来表示p-正规集$B\{C_p\}$.

定义 **1.2**[7] 设X, P, P'', J均如上定义且局部凸空间(X, T_P)是半自反的$(J(X) = X'')$,若对任意$p'' \in P''$,存在$p \in P$和$\lambda > 0$,使得对任意$x \in X$,有$p''(Jx) = \lambda p(x)$,则称局部凸空间(X, T_P)是P-自反的. 换句话说(X, T_P)是P-自反的当且仅当(X, T_P)是半自反的且对任意$p'' \in P''$,存在$p \in P$和$\lambda > 0$,使得 $p'' \circ J = \lambda p$ 成立.

注 **1.1** 文献[7]已证明P-自反的空间(X, T_P)是自反的,但反之不成立,且说明对赋范空间而言,P-自反和自反等价,因此P-自反概念是赋范空间中自反概念的自然推广.

定义 **1.3**[7] 设p_1, p_2是X上的两个半范数,若存在$\lambda > 0$,使得$p_1 = \lambda p_2$,则称半范数p_1, p_2是绝对等价的.

定义 **1.4**[7] 设P是X上的一半范数族,P中的任意两个半范数都不绝对等价,则称P是良好的半范数族.

定义 **1.5**[7] 设P是X上一半范数族,P_1是X上一良好化的半范数族,$P_1 \subset P$且P中任一元素都和P_1中某个元素是绝对等价的,则称P_1是P的良好化.

引理 **1.1**[7] 对任意的$p \in P$和$x \in (X, T_P)$,有$p(x) = \sup_{f\in U(X'(p))} |f(x)|$成立,其中$U(X'(p)) = \{f \in X'(p) : \|f\|_p' \leqslant 1\}$是$X'$中的绝对凸$w^*$紧集.

引理 **1.2**[7] 对任意的$p \in P$, $X'(p) = (X, p)'$成立,并且当$f \in X'(p)$时,有 $\|f\|_p' = \sup_{x\in U_p(X)} f(x) = \sup_{x\in S_p(X)} f(x)$; $|f(x)| \leqslant \|f\|_p' \circ p(x)$,任意的$x \in X$.

引理 **1.3**[7] 若(X, T_P)是P-自反的,则自然嵌入映射$J : X \to X''$是在上同胚,因此$J(T_P) = T_{P''}$,即$J(\{G \subset X : G \in T_P\}) = \{G'' \subset X'' : G'' \in T_{P''}\}$;若$(X, T_P)$是$P$-自反的,且$P$是良好的,记$B\{C_{p''}\} = \{F \in X'' : p''(F) \leqslant C_{p''}, \forall p'' \in P''\}$,则存在$B\{C_p\} = \{x \in X : p(x) \leqslant C_p, \forall p \in P\}$,使得$B\{C_{p''}\} = J(B\{C_p\})$.

引理 **1.4**[7] 若(X, T_P)是P-自反的,则$(X', T_{P'})$和$(X'', T_{P''})$分别是P'-自反和P''-自反的.

引理 **1.5**[7] 设P是实线性空间X上的一半范数族,P_1是P的良好化且$P_1 \subset P$,则 $T_P = T_{P_1}$.

2 平均局部一致凸性与一致光滑性

定义 **2.1** 偶对(X, P)称为平均局部一致凸的,若对任意$p \in P$, $\{x_n\} \subset U_p(X)$和$x \in U_P(X)$且$\{x_n\}$是T_P有界的,当$\lim_n p(x_n + x) = 2$时,有$\lim_n p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) = 0$.

注 **2.1** 当生成X上局部凸拓扑T^P的这一族半范数P是由一个元素p构成的,并且p还是一个范数

时，局部凸 Hausdorff 空间 (X, T_P) 就是一个 Banach 空间，这时定义 2.1 正好是 Banach 空间相应的定义.

定理 2.1 偶对 (X, P) 是平均局部一致凸的，当且仅当任意的 $p \in P$，X 中任一 p-正规集 B 和任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\{x_n\} \subset B$ 和 $x \in U_p(X)$，且 $P(\frac{x_n + x}{2}) > 1 - \delta$ 时，有 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) < \varepsilon$.

证明 必要性. 假设存在 $p \in P$ 和 X 中某一正规集 B 及 $\varepsilon_0 > 0$，对任意的 $\delta > 0$，都存在 $\{x_n\} \subset B$ 和 $x \in U_p(X)$，满足 $p(\frac{x_n + x}{2}) > 1 - \delta$，但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) \geqslant \varepsilon_0$.

取 $\delta = \frac{1}{2}$，则存在 $\{x_{1(n)}\} \subset B$，满足 $p(\frac{x_{1(n)} + x}{2}) > 1 - \frac{1}{2}$，但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1(i)} - x) \geqslant \varepsilon_0$.

一般地取 $\delta = \frac{1}{n+1}$，则存在 $\{x_{n(n)}\} \subset B$，满足 $p(\frac{x_{n(n)} + x}{2}) > 1 - \frac{1}{n+1}$，但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{n(i)} - x) \geqslant \varepsilon_0$.

因为 B 是一个 p-正规集，所以我们得到 B 中的序列 $\{x_{n(n)}\}$ 是 T_P 有界的，由 $B \subset U_p(X)$，知 $\{x_{n(n)}\} \subset U_p(X)$，且

$$1 - \frac{1}{n+1} < p(\frac{x_{n(n)} + x}{2}) \leqslant \frac{1}{2}[p(x_{n(n)}) + p(x)] \leqslant 1.$$

所以 $\lim_{n\to} p(x_{n(n)} + x) = 2$，但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{n(i)} - x) \geqslant \varepsilon_0$，这与 (X, P) 是平均局部一致凸的矛盾.

充分性. 假设 (X, P) 不是平均局部一致凸的，由定义 2.1 知，存在 $p \in P$，$\{x_n\} \subset U_p(X)$，且 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的，$x \in U_p(X)$，满足 $\lim_{n\to} p(\frac{x_n + x}{2}) = 1$，但是 $\lim_{n\to} p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) \neq 0$，因此存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和自然数子列 $\{n_k\}$，使得 $p(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_i} - x) \geqslant \varepsilon_0$，任意的 $k \in \mathbb{N}$. 不妨设

$$p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) \geqslant \varepsilon_0, \text{任意的 } n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

又令 $B \triangleq \{z \in X : p(z) \leqslant 1, q(z) \leqslant \sup_n q(x_n) + \sup_n q(x)\}$，任意的 $q \in \frac{P}{\{p\}}$，则 B 是 X 中的 p-正规集，且显然有 $\{x_n\} \subset B$，$x \in B$.

由条件和上述 p，ε_0，存在 $\delta > 0$，使得当 $\{x_n'\} \subset B$，$X' \in B$ 满足 $p(\frac{x_n' + x'}{2}) > 1 - \delta$ 时，有

$$p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_n' - x') < \varepsilon_0. \qquad (2)$$

由于 $\lim_{n\to} p(\frac{x_n + x}{2}) = 1$，故对上述 δ，存在 $N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，有 $p(\frac{x_n + x}{2}) > 1 - \delta$，由 (2) 式有 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) < \varepsilon_0$. 这与 (1) 式矛盾.

3 平均局部一致凸与一致光滑的对偶关系

定义 3.1 称偶对 (X, P) 为平均局部一致光滑的，若对任意 $p \in P$，$x \in S_p(X)$ 以及 X 中任一 p-正规集 B 决定的 X' 的半范数 p_B'，当 $\{f_n\} \subset U(X'(p))$ 及存在 $f \in \sum_p(x)$，满足 $\lim_{n\to} p_B'(f_n + f) = 2$ 时，有 $\lim_{n\to} p_B'(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - f) = 0$.

定理 3.1 (1) 若偶对 (X', P') 是平均局部一致凸的，则 (X, P) 是平均局部一致光滑的.

(2) 若偶对 (X', P') 是平均局部一致光滑的，则 (X, P) 是平均局部一致凸的.

证明 (1) 设任意的 $p \in P$ 和 $x \in S_p(X)$，X 中任一 p-正规集 B 决定的 X' 上的半范数 p_B'，$\{f_n\} \subset U(X'(p))$，$f \in \sum_p(x)$ 满足 $\lim_{n\to} p_B'(f_n + f) = 2$.

因为对任意的 $n \in N$，有 $p_B'(f_n) = \sup_{x\in B} |f_n(x)| \leqslant \sup_{x\in U_p(X)} |f_n(x)| = \|f_n\|_p' \leqslant 1$，且 $p_B'(f) \leqslant 1$（对任意的 $n \in N$）. 因此 $\{f_n\} \subset U_{p_B'}(X')$. 又对任意的 $p_{B'} \in P' \setminus \{p_B\}$，其中 B' 是形如 $B\{C_p\}$ 的集合，对任意的 $n \in N$，有 $p_{B'}(f_n) = \sup_{y\in B} |f_n(y)| \leqslant \sup_{p(y)\leqslant C_p} |f_n(y)| = C_p \sup_{y\in U_p(X)} |f_n(y)| = C_p \|f_n\|_p' = C_p$. 同理 $p_{B'}(f) \leqslant C_p$（对任意的 $n \in N$）. 这表明 $\{f_n\}$ 在 $(X', T_{P'})$ 中是有界的. 注意到 $\lim_{n\to} p_B'(f_n + g_n) = 2$，于是由 (X', P') 是平均局部一致凸的，有 $\lim_{n\to} p_B'(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - f) = 0$. 这表明 (X, P) 是平均局部一致光滑的.

(2) 设任意的 $p \in P$，$\{x_n\} \subset U_P(X)$ 和 $x \in U_P(X)$，其中 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的，满足 $\lim_{n\to} p(x_n + x) = 2$. 令

$$B \triangleq \{z \in X : p(z) \leqslant 1, q(z) \leqslant \sup_n q(x_n) + q(x)\}, \ \forall q \in P \setminus \{p\}\},$$

则 B 是形如 $B\{C_p\}$ 的集合，且 $C_p = 1$，故 B 是 X 中的

p-正规集，用 p'_B 表示由 p-正规集 B 决定的 X' 上的半范数. 易知 $x_n, x\in B\subset U_p(X)$（对任意的 $n\in N$）. 由引理1.1知 $U(X'(p))=\{g\in X'(p): \|g\|'_p\leqslant 1\}$ 是 X' 中的绝对凸 w^* 紧集，因而它是 $\beta(X',X)$ 有界的[6]，即是 $T_{P'}$ 有界集. 故对任意的 $p'_{B\{C_p\}}\in P'$，有 $\sup\limits_{h\in U(X'(p))} p'_{B\{C_p\}}(h)<+\infty$. 令

$$B'\triangleq\{g\in X': p'_B(g)\leqslant 1, p'_{B\{C_p\}}(g)\leqslant \sup_{h\in U(X'(p))} p'_{B\{C_p\}}(h), \forall p'_{B\{C_p\}}\in P'\setminus\{p'_B\}\},$$

则 B' 是 X' 中的 p'_B-正规集，易知 $U(X'(p))\subset B'\subset U_{p'_B}(X')$.

令 $\hat{x_n}, \hat{x}$ 分别表示 x_n 和 x 在 X'' 中的自然嵌入像，那么

$$\|\hat{x_n}\|'_{p'_n}=\sup_{p'_B(g)\leqslant 1}|\hat{x_n}(g)|=\sup_{\substack{\sup|\hat{x}_n(g)|\\ y\in B}}|\hat{x_n}(g)|\leqslant$$

1（对任意的 $n\in N$），即 $\{\hat{x_n}\}\subset U(X''(p'_B))$. 同理 $\hat{x}\in U(X''(p'_B))$. 现在令 $p''_{B'}(F)\triangleq\sup\limits_{g\in B'}|F(g)|$（任意的 $F\in X''$），则 $p''_{B'}$ 是由 p'_B-正规集 $B'\subset X'$ 决定的 X'' 上的半范数，由 $U(X'(p))\subset B'\subset U_{p'_B}(X')$ 和引理1.2得

$$p''_{B'}(\hat{x_n}+\hat{x})=\sup_{g\in B'}|(\hat{x_n}+\hat{x})(g)|\leqslant \sup_{p'_B(g)\leqslant 1}|(\hat{x_n}+\hat{x})(g)|=\|\hat{x_n}+\hat{x}\|'_{p'_B}\leqslant \|\hat{x_n}\|'_{p'_B}+\|\hat{x}\|'_{p'_B}=2,$$

$$p''_{B'}(\hat{x_n}+\hat{x})=\sup_{g\in B'}|(\hat{x_n}+\hat{x})(g)|\geqslant \sup_{\|g\|'_p\leqslant 1}|(\hat{x_n}+\hat{x})(g)|=\sup_{\|g\|'_p\leqslant 1}|g(x_n+x)|=p(x_n+x).$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}p(x_n+x)=2$，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}p''_{B'}(\hat{x_n}+\hat{x})=2$. 已知 (X',P') 是平均局部一致光滑的，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}p''_{B'}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{x_i}-\hat{x})=0$. 又因为

$$0\leqslant p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x)=\sup_{\|g\|'_p\leqslant 1}|g(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x)|\leqslant\sup_{g\in B'}|g(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x)|=\sup_{g\in B'}|(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x_i}-\hat{x})(g)|=p''_{B'}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x_i}-\hat{x}),$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}p(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-x)=0$，这就证明了 (X,P) 是平均局部一致凸的.

定理3.2 设 (X,P) 是偶对，p_0, p_1 是 P 中两个绝对等价的半范数，则 B_0 是 (X,P) 中的 p_0-正规集，p'_{B_0} 是 B_0 决定的 X' 上的半范数，$\{f_n\}\subset U(X'(p_0))$ 和 $f\in\sum_{p_0}(x_0)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}p'_{B_0}(f_n+f)=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}p'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f_i-f)=0$ 当且仅当 $B_1=\lambda B_0$ 是 (X,P) 中的 p_1-正规集，$p'_{B_1}=\lambda p'_{B_0}$ 是 B_1 决定的 X' 上的半范数，$\{\tilde{f_n}\}=\{\lambda^{-1}f_n\}\subset U(X'(p_1))$ 和 $\tilde{f}=\lambda^{-1}f\in\sum_{p_1}\lambda x_0$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}p'_{B_1}(\tilde{f_n}+\tilde{f})=2$，$\lim\limits_{n}p'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{f_i}-\tilde{f})=0$.

证明　必要性. 设 $B_0=B\{C_p\}$ 是 (X,P) 中的 p_0-正规集，其中 $C_{p_0}=1$. 先证明在已知条件下不可能有 $\lambda C_{p_1}<1$. 令

$$\tilde{B_0}=\{x\in X: p(x)\leqslant C_{p_0}, \forall p\in P\setminus\{p_1\}, p_0(x)\leqslant\lambda C_{p_1}\},$$

显然有 $B_0=\tilde{B_0}$. 于是，当 $\{f_n\}\subset U(X'(p_0))$ 和 $f\in\sum_{p_0}(x_0)$ 时，

$$p'_{B_0}(f_n+f)\leqslant\sup_{x\in\tilde{B_0}}|(f_n+f)(x)|=\sup_{x\in\tilde{B}_0}|(f_n+f)(x)|\leqslant\sup_{p_0(x)\leqslant\lambda C_{p_1}}|f_n(x)|+\sup_{p_0(x)\leqslant\lambda C_{p_1}}|f(x)|=\lambda C_{p_1}\sup_{p_0(x)\leqslant 1}|f_n(x)|+\lambda C_{p_1}\sup_{p_0(x)\leqslant 1}|f(x)|=\lambda C_{p_1}(\|f_n\|'_{p_0}+\|f\|'_{p_0})=2\lambda C_{p_1}<2,$$ 任意的 $n\in N$，

得出 $\lim\limits_{n\to\infty}p'_{B_0}(f_n+f)<2$，和已知条件矛盾.

现在只需要考虑 $\lambda C_{p_1}\geqslant 1$ 的情形. 令 $B_1\triangleq\lambda B_0$，$\tilde{B_1}=\{x\in X: p(x)\leqslant\lambda C_{p_0}, \forall p\in P\setminus\{p_1\}, p_1(x)\leqslant\lambda C_{p_1}\}$，则有 $B_1=\tilde{B_1}$（因为对任意的 $x\in B_0$，即有 $p_1(\lambda x)=\lambda p(x)\leqslant\lambda C_{p_1}$，又有 $p_1(\lambda x)=\lambda p_1(x)=p_0(x)\leqslant 1$，而 $\lambda C_{p_0}\geqslant 1$，于是有 $B_1\subset\tilde{B_1}$，反包含关系 $B_1\supset\tilde{B_1}$ 是显然的）. 因此 B_1 是 (X,P) 中 p-正规集. 令 p'_{B_1} 是由 B_1 决定的 X' 上的半范数，则有 $p'_{B_1}(f)=\sup\limits_{x\in B_1}|f(x)|=\lambda\sup\limits_{x\in\lambda B_0}|f(\lambda^{-1}x)|=\lambda\sup\limits_{x\in B_0}|f(x)|=\lambda p'_{B_0}(f)$，任意 $f\in X'$，即 $p'_{B_1}=\lambda p'_{B_0}$.

现在设 $\{f_n\}\subset U(X'(p_0))$ 和 $f\in\sum_{p_0}(x_0)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}p'_{B_0}(f_n+f)=2$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}p'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f_i-f)=0$，令 $\tilde{f_n}=\lambda^{-1}f_n$，$\tilde{f}=\lambda^{-1}f$，则

$$\|\tilde{f_n}\|'_{p_1}=\sup_{p_1(x)\leqslant 1}|\tilde{f_n}(x)|=\sup_{\lambda^{-1}p_0(x)\leqslant 1}|\lambda^{-1}f_n(x)|=\sup_{p_0(x)\leqslant 1}|f_n(x)|=\|f_n\|'_{p_0}\leqslant 1.$$

同理有 $\|\tilde{f}\|'_{p_1}\leqslant 1$（对任意的 $n\in N$），因此 $\{f_n\}\subset$

$U(X'(p_1))$ 和 $\tilde{f}=\lambda^{-1}f\in\sum_{p_1}(\lambda x_0)$，且满足

$\lim_{n\to}p'_{B_1}(\tilde{f}_n+\tilde{f})=\lambda\lim_{n\to}p'_{B_0}(\lambda^{-1}(f_n+f))=\lim_{n\to}p'_{B_0}(f_n+f)=2$，

$\lim_{n\to}p'_{B_1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i-\tilde{f})=$

$\lambda\lim_{n\to}p'_{B_0}(\lambda^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i-f))=\lim_{n\to}P'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i-\frac{1}{n}f)=0$.

充分性．由于 $p_1=\lambda^{-1}p_0$，根据已知条件，应用上述证明过程即可．

定理3.3　设 P 是实线性空间 X 上的一分离半范数族，且 P_1 是 P 的良好化，则

(1) 偶对 (X,P) 是平均局部一致凸的当且仅当 (X,P_1) 是平均局部一致凸的．

(2) 偶对 (X,P) 是平均局部一致光滑的当且仅当 (X,P_1) 是平均局部一致光滑的．

证明　(1) 必要性．设 (X,p) 是平均局部一致凸空间，则由 $P_1\subset P$ 和平均局部一致凸的定义可知，(X,P_1) 是平均局部一致凸的．

充分性．设 (X,P_1) 是平均局部一致凸的．任取 $p\in P$，$\{x_n\}\subset U_p(X)$ 和 $x\in U_p(X)$ 且 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的，满足 $\lim_{n\to}p(x_n+x)=2$．由 P_1 的定义知，存在 $q\in P_1$ 和 $\lambda>0$，使得 $p=\lambda q$．由 $q(\lambda x_n)=\lambda q(x_n)=p(x_n)\leqslant 1$ 和 $q(\lambda x)=\lambda q(x)=p(x)\leqslant 1$，知 $\{\lambda x_n\}\subset U_q(X)$ 和 $\lambda x\in U_q(X)$．再根据引理1.5和 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的知，$\{\lambda x_n\}$ 是 T_{P_1} 有界的，且 $\lim_{n\to}q(\lambda x_n+\lambda x)=\lim_{n\to}\lambda q(x_n+x)=\lim_{n\to}p(x_n+x)=2$．由于 (X,P_1) 是平均局部一致凸的，所以 $\lim_{n\to}q(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i-\lambda x)=0$，即

$\lim_{n\to}p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x)=\lim_{n\to}\lambda q(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x)=\lim_{n\to}q(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i-\lambda x)=0$.

所以 (X,P) 是平均局部一致凸的．

(2) 必要性．设 (X,P) 是平均局部一致光滑的，由 $P_1\subset P$ 和平均局部一致光滑的定义，则 (X,P) 是平均局部一致光滑的．

充分性．已知 (X,P_1) 是平均局部一致光滑的，任取 $p_0\in P$，设 B_0 是 (X,P) 中任意 p_0-正规集，p'_{B_0} 是 B_0 决定的 $(X,T_P)'=X'$ 上的半范数，且 $\{f_n\}\subset U(X'(p_0))$ 和 $f\in\sum_{p_0}(x)$，满足 $\lim_{n\to}p'_{B_0}(f_n+f)=2$．由于 P_1 是 P 的良好化，故存在 $p_1\in P_1$ 和 $\lambda>0$ 使得 $p_0=\lambda p_1$．根据定理3.2，可知 $B_1=\lambda B_0$ 是 $(X,T_P)=(X,T_{P_1})$ 中的 p_1-正规集，$p'_{B_1}=\lambda p'_{B_b}$ 是 B_1 决定的 $(X,T_{P_1})'=X'$ 上的半范数，且 $\{\tilde{f}_n\}=\{\lambda^{-1}f_n\}\subset U(X'(p_1))$ 和 $\tilde{f}=\lambda^{-1}f\in U(X'(p_1))$，且满足 $\lim_{n\to}P'_{B_1}(\tilde{f}_n+\tilde{f})=2$．注意到 $\{\tilde{f}_n\}\subset U(X'(p_1))$ 和 $\tilde{f}\in\sum_{p_1}\lambda x$ 相应于偶对 (X,P_1) 依然是成立的，于是由 (X,P_1) 是平均局部一致光滑的，可知 $\lim_{n\to}p'_{B_1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i-\tilde{f})=0$．由于同时有 $\lim_{n\to}p'_{B_1}(\tilde{f}_n+\tilde{f})=2$ 且 $\lim_{n\to}p'_{B_1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i-\tilde{f})=0$，再次由定理3.2的充分性得出 $\lim_{n\to}p'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i-f)=0$．即 (X,P) 是平均局部一致光滑的．

定理3.4　若 (X,T_P) 是 P-自反的，则

(1) 偶对 (X,P) 是平均局部一致凸的当且仅当偶对 (X'',P'') 是平均局部一致凸的．

(2) 偶对 (X,P) 是平均局部一致光滑的当且仅当偶对 (X'',P'') 是平均局部一致光滑的．

证明　由定理3.3，我们不妨设 P 是良好的半范数族．

(1) 充分性．由引理3.1知，若 (X'',P'') 是平均局部一致凸的，则 (X',P') 是平均局部一致光滑的，再次应用定理3.1就可以得出 (X,P) 是平均局部一致凸的．

必要性．若 (X,P) 是平均局部一致凸的，即对任意的 $p\in P$，$\{x_n\}\subset U_p(X)$ 和 $x\in U_p(X)$ 且 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的．当 $\lim_{n\to}p(x_n+x)=2$ 时，有 $\lim_{n\to}p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x)=0$．任取 $p''\in P''$，由于 (X,T_P) 是 P-自反的，知 $J(X)=X''$，且存在 $p\in P$ 和 $\lambda>0$ 使得 $p''\circ J=\lambda p$．任取 $\{x''_n\}\subset U_{p''}(X'')$ 和 $X''\in U_{p''}(X'')$ 且 $\{x''_n\}$ 是 $T_{P''}$ 有界的，对任意的 $n\in N$，设 $Jx_n=x''_n$，$Jx=x''$，其中 $x_n,x\in X$，则有 $\{Jx_n\}\subset U_{p''}(X'')$ 是 $T_{P''}=J(T_P)$ 有界的且 $Jx\in U_{p'''}(X'')$，因而 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的．

此外，对任意 $n\in N$，由 $p''\circ J(x_n)\leqslant 1$，$p''\circ J(x)\leqslant 1$ 知 $\lambda p(x_n)\leqslant 1$，$\lambda p(x)\leqslant 1$，因此 $\{\lambda x_n\}\subset U_p(X)$，$\lambda x\in U_p(X)$，且 $\{\lambda x_n\}$ 是 T_P 有界的，所以当 $\lim_{n\to}p''(x''_n+x'')=2$ 时，即当 $\lim_{n\to}\lambda p(x_n+x)=\lim_{n\to}p(\lambda x_n+\lambda x)=2$ 时，由于 (X,P) 是平均局部一致凸的，可知

$\lim_{n\to}\lambda p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x)=\lim_{n\to}p(\lambda(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x))=\lim_{n\to}p(\lambda\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\lambda x)=0$，因而 $\lim_{n\to}p''(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x''_i-x'')=$

$\lim_{n\to}(p'' \circ J)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) = \lim_{n\to}\lambda p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x) = 0$,所以,$(X'', P'')$ 是平均局部一致凸的.

(2) 充分性.同样可由定理 3.1 得.

必要性.设 (X, P) 是平均局部一致光滑的,即对任意的 $p \in P$, $x \in S_p(X)$, X 中任意 p-正规集 B 决定的 X' 上的半范数 p'_B,当 $\{f_n\} \subset U(X'(p))$ 和 $f \in \sum_p(x)$ 满足 $\lim_{n\to} p'_B(f_n + f) = 2$ 时,有 $\lim_{n\to} p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - f) = 0$.

再证明 (X'', P'') 是平均局部一致光滑的.

对任意的 $p'' \in P''$,由于 (X, T_P) 是 p-自反的,所以 $J(X) = X''$ 且存在 $p \in P$ 和 $\lambda > 0$,使得 $p'' \circ J = \lambda p$,对 X'' 中任意 p''-正规集 $\tilde{B} = B\{C''_q\}$,由引理 1.3 知,存在 $B\{C_q\} \subset X$,使得 $B\{C''_q\} = J(B\{C_q\})$. 令 $B = B\{\lambda C_q\}$,则 B 是 X 中的 p-正规集.设 $\tilde{B}$ 决定的 X''' 上的半范数为 $p'''_{\tilde{B}}$,且设 B 决定的 X' 上的半范数为 p'_B,令 $J_1: X \to X''$ 为自然嵌入映射,则对任意 $f \in X'$,有

$p'''_{\tilde{B}}(J_1 f) = \sup_{\hat{x}\in\tilde{B}} |J_1 f(\hat{x})| = \sup_{Jx\in\tilde{B}} |J_1 f(Jx)| = \sup_{x\in\lambda^{-1}B} |f(x)| = \lambda^{-1} \sup_{x\in\tilde{B}} |f(x)| = \lambda^{-1} p'_B(f)$(注意 $J^{-1}(\tilde{B}) = B\{C_q\} = \lambda^{-1} B\{\lambda C_q\} = \lambda^{-1} B$),所以 $p'''_{\tilde{B}} \circ J_1 = \lambda^{-1} p'_B$. 任取 $\{\tilde{f}_n\} \subset U(X'''(p''))$ 和 $\tilde{f} \in \sum_{p''}(f)$,满足 $\lim_{n\to} p'''_B(\tilde{f}_n + \tilde{f}) = 2$. 注意到 $(X', T_{P'})$ 是 P'-自反的,有 $J_1(X') = X'''$. 设 $\tilde{f}_n = J_1 f_n$, $\tilde{f} = J_1 f$(对任意的 $n \in N$),从而

$1 \geqslant \|\tilde{f}_n\|''_{p'''} = \sup_{p''(F)\leqslant 1} |\tilde{f}_n(F)| = \sup_{p''\circ J(x)\leqslant 1} |(J_1 f_n)(Jx)| = \sup_{\lambda p(x)\leqslant 1} |(J_1 f_n)(Jx)| = \sup_{p(x)\leqslant\lambda^{-1}} |f_n(x)| = \|\lambda^{-1} f_n\|'_p$,

所以 $\{\lambda^{-1} f_n\} \subset U(X'(p))$. 同理有 $\{\lambda^{-1} f\} \in \sum_p(x)$. 因此, $2 = \lim_{n\to} p'''_{\tilde{B}}(\tilde{f}_n + \tilde{f}) = \lim_{n\to} p'''_{\tilde{B}} \circ J(f_n + f) = \lambda^{-1} \lim_{n\to} p'_B(f_n + f) = \lim_{n\to} p'_B(\lambda^{-1} f_n + \lambda^{-1} f)$,由于 (X, P) 是平均局部一致光滑的,所以

$$\lim_{n\to} p'''_{\tilde{B}}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i - \tilde{f}) = \lim_{n\to} p'''_{\tilde{B}} \circ J(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - f) = \lim_{n\to} \lambda^{-1} p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - f) = \lim_{n\to} p'_B(\lambda^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - \lambda^{-1} f) = 0.$$

这说明 (X'', P'') 是平均局部一致光滑的.

定理 3.5 若 (X, T_P) 是 P-自反的,则

(1) (X, P) 是平均局部一致凸的当且仅当 (X', P') 是平均局部一致光滑的.

(2) (X, P) 是平均局部一致光滑的当且仅当 (X', P') 是平均局部一致凸的.

证明 (1) 充分性.由定理 3.1 直接可得.

必要性.因为 (X, P) 是平均局部一致凸,由定理 3.4 知 (X'', P'') 是平均局部一致凸的,再由定理 3.1 可得 (X', P') 是平均局部一致光滑的.

(2) 充分性.由定理 3.1 直接可得.

必要性.因为 (X, P) 是平均局部一致光滑的,由定理 3.4 知 (X'', P'') 是平均局部一致光滑的.再由定理 3.1 可得 (X', P') 是平均局部一致凸的.

若将 Banach 空间 $(X, \|\circ\|)$ 看为一个偶对,利用定理 3.5,显然有以下推论.

推论 3.1 若 Banach 空间 $(X, \|\circ\|)$ 是自反的,则有

(1) $(X, \|\circ\|)$ 是平均局部一致凸的当且仅当 $(X', \|\circ\|')$ 是平均局部一致光滑的.

(2) $(X, \|\circ\|)$ 是平均局部一致光滑的当且仅当 $(X', \|\circ\|')$ 是平均局部一致凸的.

由此可见我们确实把 Banach 空间关于平均局部一致凸性和一致光滑性推广到了局部凸空间.

参考文献:

[1] Diminnie C R, White A G. Strict convexity in topological vector spaces[J]. Math Japonica, 1977, 22(1): 49-56.

[2] 国起,吴从炘.局部凸空间的严格凸性与光滑性[J].东北数学, 1989, 5(4): 465-472.

[3] 吴从炘,国起.局部凸空间的一致凸性[J].数学年刊, 1990, 11A(3): 351-354.

[4] 白国仲.关于平均一致凸空间[J].华中师范大学学报:自然科学版, 1995, 13(2): 8-11.

[5] 林尤武,魏文展,唐献秀.局部凸空间的平均一致凸性与平均一致光滑性[J].广西科学, 2009, 16(1): 17-22.

[6] Wilansky A. Modern methods in Topological vector spaces[M]. New York: Mc GrnHill, 1978.

[7] 齐淑彦,苏雅拉图.局部凸空间的 k-强凸性与 k-强光滑性[J].应用泛函分析学报, 2007, 9(1): 70-76.

(责任编辑:尹 闯)