DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.02.017

广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(2):126～128

$(X\oplus Y)_1$ 与 K-Drop 凸空间*

$(X\oplus Y)_1$ and K-Drop Convex Space

马百万[1],魏文展[2],张吉超[1]

MA Bai-wan[1],WEI Wen-zhan[2],ZHANG Ji-chao[1]

(1.广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530023;2.广西经贸职业技术学院,广西南宁 530021)

(1. School of Mathematical Sciences,Guangxi Teachers Education University,Nanning,Guangxi,530023,China;2. Guangxi Economic and Trade Polytechnic,Nanning,Guangxi,530021,China)

摘要:讨论 Banach 空间 X k- drop 凸及局部 k- drop 凸的性质,给出 X(局部)k- drop 凸的充要条件,并利用该充要条件,证明若 $(X\oplus Y)_1$ 为 k-DC 空间,则 X,Y 分别为 k- DC 空间.

关键词:k-drop 凸　局部 k-drop 凸　仿射张

中图法分类号:O174.13　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2011)02-0126-03

Abstract:We give the suffcient and necessary condition for *Banach* space to be $(L)k$- DC,by which it is proved that if $(X\oplus Y)_1$ is the space k-DC.

Key words:k- drop convexity,locally k- drop convexity,affinely span

2004 年,魏文展等[1]引入 k-drop 凸(KDC)空间,阐述何为 k- 强光滑空间的对偶空间,定义了 k-drop 凸空间并讨论该空间的一些性质.本文在此基础上给出空间(局部)k-drop 凸的充要条件,并利用该充要条件,探讨 $(X\oplus Y)_1$ 的(局部)k-drop 凸.我们给出的充要条件比原定义较为简单,从得到的充要条件可知,若 $(X\oplus Y)_1$ 为 k-DC 空间,则 X,Y 为 k-DC 空间.该结果推广了文献[2]的结论.

1　定义及引理

本文所涉及的空间 X,Y 均为实 Banch 空间,并记 $X^*,Y^*,(X\oplus Y)_1{}^*$ 分别为 $X,Y,(X\oplus Y)_1$ 的对偶,以 $B(X),S(X)$ 表示 X 的单位球及单位球面,符号如下:

$$S(X)=\{x:x\in X,\|x\|=1\};$$

$$S(X^*)=\{f:f\in X^*,\|f\|=1\}.$$

当任意的 $x_0,x_1,\cdots,x_k\in S(X)$ 时,记

$$B(x_0,x_1,\cdots,x_k)=\sup\left\{\begin{vmatrix} f_0(x_0) & \cdots & f_0(x_k)\\ f_1(x_0) & \cdots & f_1(x_k)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_k(x_0) & \cdots & f_k(x_k)\end{vmatrix};\begin{array}{l} f_i\in B(X^*),\\ i=0,\cdots,k\end{array}\right\}.$$

将上述行列式首行换成$(1,1,\cdots,1)$,那么所得形式记为 $A(x_0,x_1,\cdots,x_k)$,如果将首行换成$(\|x_0\|,\|x_1\|,\cdots,\|x_k\|)$,则所得形式记为 $C(x_0,x_1,\cdots,x_k)$.

定义 1.1[3]　称 Banach 空间 X 为 k- 严格凸的,若对 X 中任意 $k+1$ 个元素 $x_0,x_1,\cdots,x_k$. 当 $\|\sum_{i=0}^{k}x_i\|=\sum_{i=0}^{k}\|x_i\|$ 时,$x_0,x_1,\cdots,x_k$ 是线性相关的.

定义 1.2[1]　称 Banach 空间 X 为 k-DC(k-drop 凸)的,若对任意 $f\in S(X^*)$ 及 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\}\subset S(X)$ 且 $f(\sum_{i=1}^{k+1}x_i)>k+1-\delta$ 时,$A(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})<\varepsilon$.

定义 1.3[4]　称 Banach 空间 X 为 L-kDC 的,若对任意 $f\in S(X^*)$,$x_0\in S(X)$ 及 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(x_0,f,\varepsilon)>0$,当 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subset S(X)$ 且 $f(\sum_{i=0}^{k}x_i)>k+1-\delta$ 时,$A(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$.

收稿日期:2010-10-25

修回日期:2010-12-13

作者简介:马百万(1984-),男,硕士研究生,主要从事泛函分析研究。

*广西自然科学基金项目(0135002)资助。

引理 1.1[2] X 为 Banach 空间,当 $x_0,x_1,\cdots,x_k \in X$ 且 $\|\sum_{i=0}^{k}x_i\| = \sum_{i=0}^{k}\|x_i\|$ 时,$x_0,x_1,\cdots,x_k$ 线性相关的充要条件为 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k)=0$.

引理 1.2[2] 称 Banach 空间 X 为 k- 严格凸的,当且仅当 $x_0,x_1,\cdots,x_k \in X$ 且 $\|\sum_{i=0}^{k}x_i\| = \sum_{i=0}^{k}\|x_i\|$ 时,有 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k)=0$.

引理 1.3[4] X 是 L-kDC 的当且仅当对任意 $x \in S(X)$ 及 $f \in S(X^*)$,$f(x)=1$,如果 $x_1^n,x_2^n,\cdots,x_k^n \in S(X)$ 且 $f(x+x_1^n+\cdots+x_k^n)\to k+1(n\to+\infty)$,则有 $A(x,x_1^n,\cdots,x_k^n)\to 0,n\to+\infty$.

引理 1.4[3] 设 X 是 Banach 空间,当 $x_1,\cdots,x_{k+1} \in S(X)$,若令 $d_1=\mathrm{dist}(x_1,[x_2,\cdots,x_{k+1}])$,$d_2=\mathrm{dist}(x_2,[x_3,\cdots,x_{k+1}])$,$\cdots$,$d_k=\|x_k-x_{k+1}\|$,则

$$d_1\cdot d_2\cdots d_k \leqslant A(x_1,\cdots,x_k) \leqslant k^{\frac{k}{2}}d_1\cdot d_2\cdots d_k.$$

其中$[x_i,\cdots,x_{k+1}]$表示由 $x_i,\cdots,x_{k+1}$ 生成的仿射子空间.

引理 1.5[5] 设 X,Y 是实 Banach 空间,则空间 $(X\oplus Y)^*$ 与空间 $X^*\oplus Y^*$ 是同构的,且对应为

$$F\in(X\oplus Y)^*\to(F_x,F_y)\in X^*\oplus Y^*,$$

其中 $F_x(x)=F(x,0)$,$F_y(y)=F(0,y)$,$x\in X$,$y\in Y$.

引理 1.6[4] 对任意的 $k\in N$,若 Banach 空间 X 是 k-DC 的,则 X 是$(k+1)$-DC 的.

证明 设任意的 $f\in S(X^*)$,$\{x_1^n,\cdots,x_{k+2}^n\}\subset S(X)$,满足 $f(\sum_{i=1}^{k+2}x_i^n)\to k+2$.则对任意的 $j\in N$,$1\leqslant j\leqslant k+2$,有

$$|f(\sum_{i=1}^{k+2}x_i^n)|-1\leqslant|f(\sum_{i=1}^{k+2}x_i^n)|-|f(x_j)|\leqslant$$

$$|f(\sum_{i=1,i\neq j}^{k+2}x_i^n)|\leqslant\|\sum_{i=1,i\neq j}^{k+2}x_i^n\|\leqslant\sum_{i=1,i\neq j}^{k+2}\|x_i^n\|=k+1.$$

故

$$f(\sum_{i=1,i\neq j}^{k+2}x_i^n)\to k+1.$$

由于 X 是 k-DC 的,由引理 1.3 知 $A(x_1^n,\cdots,x_{j-1}^n,x_{j+1}^n,\cdots,x_{k+2}^n)\to 0$,$1\leqslant j\leqslant k+2$.又由行列式性质知

$$A(x_1^n,\cdots,x_{k+2}^n)\leqslant\sum_{j=1}^{k+2}A(x_1^n,\cdots,x_{j-1}^n,x_{j+1}^n,\cdots,x_{k+2}^n).$$

故 $A(x_1^n,\cdots,x_{k+2}^n)\to 0$,从而 X 是$(k+1)$-DC 的.

2 主要结果

定理 2.1 Banach 空间 X 为 L-kDC 的充要条件是,对 $\forall\varepsilon>0$,$x_0\in S(X)$ 及 $f\in S(X^*)$,存在 $\delta=\delta(x_0,f,\varepsilon)>0$,当 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in S(X)$ 且 $k+1-f(\sum_{i=0}^{k}x_i)<\delta$ 时,有 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$.

证明 必要性.若 $\exists x_0\in S(X)$,$\varepsilon_0>0$ 及 $f_0\in S(X^*)$,使得对 $\forall n\in N$,有 $x_1^n,x_2^n,\cdots,x_k^n\in S(X)$ 满足 $k+1-f_0(\sum_{i=0}^{k}x_i^n)<\frac{1}{n}(x_0^n=x_0)$.但 $B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\geqslant\varepsilon_0$,$\forall n\in N$,由 L-kDC 知道 $A(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\to 0$.取 $y_{i+1}^n\in[x_0^n,x_1^n,\cdots,x_i^n]$ 且满足 $\|x_{i+1}^n-y_{i+1}^n\|=d(x_{i+1}^n,[x_0^n,x_1^n,\cdots,x_i^n])$.因为 $\dim[x_0^n,x_1^n,\cdots,x_i^n]\leqslant i+1$,那么 y_{i+1}^n 存在.由于 y_{i+1}^n 是$[x_0^n,x_1^n,\cdots,x_i^n]$的一个线性组合,$i=0,1,\cdots,k-1$.根据行列式性质得

$$\varepsilon_0\leqslant B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\leqslant B(x_0^n,x_1^n-y_1^n,\cdots,x_k^n-y_k^n)\leqslant(k+1)!d(x_1^n,[x_0^n])\cdots d(x_k^n,[x_0^n,x_1^n,\cdots,x_{k-1}^n]).$$

再由引理 1.4 得

$$(k+1)!d(x_1^n,[x_0^n])\cdots d(x_k^n,[x_0^n,x_1^n,\cdots,x_{k-1}^n])\leqslant(k+1)!A(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\to 0,$$

从而得到矛盾.

充分性.若 $\exists x_0\in S(X)$,$\varepsilon_0>0$ 及 $f_0\in S(X^*)$,使得对 $\forall n\in N$ 有 $x_1^n,x_2^n,\cdots,x_k^n\in S(X)$ 满足 $k+1-f_0(\sum_{i=0}^{k}x_i^n)\leqslant\frac{1}{n}(x_0^n=x_0)$.但 $A(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\geqslant\varepsilon_0$,由充分性的条件可以得到 $B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\to 0$.

记 $1-f_0(x_i^n)$ 为 $\alpha_i^{(n)}$,$i=0,1,\cdots,k$.那么

$$\varepsilon_0\leqslant A(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)=$$

$$\sup\left\{\begin{vmatrix}1-\alpha_0^{(n)}+\alpha_0^{(n)} & \cdots & 1-\alpha_k^{(n)}+\alpha_k^{(n)}\\ f_1(x_0^n) & \cdots & f_1(x_k^n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_k(x_0^n) & \cdots & f_k(x_k^n)\end{vmatrix};\begin{array}{l}f_i\in\\ B(X^*),\\ i=1,\\ \cdots,k\end{array}\right\}\leqslant$$

$$B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)+\alpha_0^{(n)}k!+\cdots+\alpha_k^{(n)}k!$$

又因为 $\alpha_0^{(n)}+\cdots+\alpha_k^{(n)}=k+1-f_0(\sum_{i=0}^{k}x_i^n)\leqslant\frac{1}{n}\to 0$,从而可以得到

$$B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)+\alpha_0^{(n)}k!+\cdots+\alpha_k^{(n)}k!\to 0,n\to\infty.$$

与上式产生矛盾,充分性成立.

定理 2.2 Banach 空间 X 为 k-DC 的充要条件是,对 $\forall\varepsilon>0$ 及 $f\in S(X^*)$,存在 $\delta=\delta(f,\varepsilon)>0$,当 $x_0,x_1,\cdots,x_k\in S(X)$ 且 $k+1-f(\sum_{i=0}^{k}x_i)<\delta$ 时,有 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$.

证明 必要性.若 $\exists\varepsilon_0>0$ 及 $f_0\in S(X^*)$,使

得对 $\forall n \in N$，有 $x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n \in S(X)$ 满足 $k+1-f_0(\sum_{i=0}^{k} x_i^n) < \frac{1}{n}$，$x_0^n = x_0$. 但 $B(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) \geqslant \varepsilon_0$，$\forall n \in N$，由 k-DC 知道 $A(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) \to 0$. 取 $y_{i+1}^n \in [x_0^n, x_1^n, \cdots, x_i^n]$ 且满足 $\| x_{i+1}^n - y_{i+1}^n \| = d(x_{i+1}^n, [x_0^n, x_1^n, \cdots, x_i^n])$. 因为 $\dim[x_0^n, x_1^n, \cdots, x_i^n] \leqslant i+1$，那么 y_{i+1}^n 存在. 由于 y_{i+1}^n 是 $[x_0^n, x_1^n, \cdots, x_i^n]$ 的一个线性组合，$i = 0, 1, \cdots, k-1$，根据行列式性质及引理 1.4 得

$$\varepsilon_0 \leqslant B(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) \leqslant B(x_0^n, x_1^n - y_1^n, \cdots, x_k^n - y_k^n) \leqslant (k+1)!\, d(x_1^n, [x_0^n]) \cdots d(x_k^n, [x_0^n, x_1^n, \cdots, x_{k-1}^n]) \leqslant (k+1)!\, A(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) \to 0,$$

从而得到矛盾.

充分性. 若 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $f_0 \in S(X^*)$，使得对 $\forall n \in N$ 有 $x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n \in S(X)$ 满足 $k+1-f_0(\sum_{i=0}^{k} x_i^n) \leqslant \frac{1}{n}(x_0^n = x_0)$. 但 $A(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) \geqslant \varepsilon_0$，由充分性的条件可以得到 $B(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) \to 0$.

记 $1 - f_0(x_i^n)$ 为 $\alpha_i^{(n)}$，$i = 0, 1, \cdots, k$. 那么

$$\varepsilon_0 \leqslant A(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) =$$

$$\sup\left\{ \begin{vmatrix} 1-\alpha_0^{(n)}+\alpha_0^{(n)} & \cdots & 1-\alpha_k^{(n)}+\alpha_k^{(n)} \\ f_1(x_0^n) & \cdots & f_1(x_k^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_0^n) & \cdots & f_k(x_k^n) \end{vmatrix} ; \begin{array}{l} f_i \in \\ B(X^*), \\ i = 1, \\ \cdots, k \end{array} \right\}$$

$$\leqslant B(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) + \alpha_0^{(n)} k! + \cdots + \alpha_k^{(n)} k!$$

又因为 $\alpha_0^{(n)} + \cdots + \alpha_k^{(n)} = k+1-f_0(\sum_{i=0}^{k} x_i^n) \leqslant \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$，从而可以得到

$$B(x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n) + \alpha_0^{(n)} k! + \cdots + \alpha_k^{(n)} k! \to 0, n \to \infty.$$

矛盾. 充分性成立.

定理 2.3 设 $(X \oplus Y)_1$ 是 k-DC，那么 Banach 空间 X, Y 为 k-DC.

证明 对 $\forall \varepsilon > 0, F \in S((X \oplus Y)_1^*)$，由于 $(X \oplus Y)_1$ 是 k-DC 的，由定理 2.2 知，$\exists \delta_{(X\oplus Y)_1}(\varepsilon, F) > 0$. 那么对 $\forall f_x \in S(X^*), f_y \in S(Y^*)$. 由引理 1.5 知，$X^* \oplus Y^*$ 同构于 $(X \oplus Y)^*$，且 $f_x(x) = F(x, 0)$，$f_y(y) = F(0, y)$. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_k \in S(X)$ 及 $(y_0, y_1, \cdots, y_k) \in S(Y)$ 满足 $k+1-f_x(\sum_{i=0}^{k} x_i) \leqslant \delta_{(X\oplus Y)_1}$，$k+1-f_y(\sum_{i=0}^{k} y_i) \leqslant \delta_{(X\oplus Y)_1}$. 则 $k+1-F(\sum_{i=0}^{k}(x_i, 0)) \leqslant \delta_{(X\oplus Y)_1}$，$k+1-F(\sum_{i=0}^{k}(0, y_i)) \leqslant \delta_{(X\oplus Y)_1}$. 因为 $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$，所以 $(x_0, 0), (x_1, 0), \cdots, (x_k, 0) \in S((X \oplus Y)_1)$，$(0, y_0), (0, y_1), \cdots, (0, y_k) \in S((X \oplus Y)_1)$. 由定理 2.2 得

$$B((x_0, 0), (x_1, 0), \cdots, (x_k, 0)) < \varepsilon,$$

即 $B(x_0, x_1, \cdots, x_k) < \varepsilon$，同理可得 $B(y_0, y_1, \cdots, y_k) < \varepsilon$. 从而 X, Y 为 k-DC 的.

推论 2.1 对任意 $k \in N$，若 $(X \oplus Y)_1$ 是 k-DC 的，则 X, Y 是 $(k+1)$-DC 的.

证明 因为 $(X \oplus Y)_1$ 是 k-DC 的，由定理 2.3 知道 X, Y 为 k-DC. 再根据引理 1.6 可知 X, Y 为 $(k+1)$-DC 的.

参考文献：

[1] 魏文展，徐厚宝. k-Dorp 凸空间的性质[J]. 数学杂志，2004，24(2)：168-172.

[2] 方习年. 关于 $(X \oplus Y)_1$ 的凸性[J]. 数学研究与评论，2000，20(2)：261-265.

[3] Bernal J，Sullivan F. Multi-dimenional volumes，superreflexivity and normal structure in Banach space[J]. Illinois J Math，1983，27：501-515.

[4] 周文，巩万中. k- Drop 凸空间与局部 k- Drop 凸空间[J]. 应用泛函分析学报，2008，10(4)：373-377.

[5] 林洁珠. 连续双线性泛函与凸性理论[D]. 广州：中山大学，2005.

（责任编辑：尹　闯）