

# 对流扩散方程 GLxF 格式数值解振荡的可控性

## The Controllability of Oscillations in Numerical Solutions of GLxF Scheme for Convective-diffusion Equation

沈柳平

SHEN Liu-ping

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系, 广西柳州 545004)

(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

**摘要:** 提出对流扩散方程  $u_t + au_x = \epsilon u_{xx}$ ,  $a \in R, \epsilon > 0$  的广义 Lax-Friedrichs 格式 (GLxF), 并给出 GLxF 格式的稳定性与收敛条件. 然后通过数值仿真说明 GLxF 格式数值解存在振荡, 并根据仿真结果提出振荡可控的 3 个猜测. 最后用 Fourier 分析方法证明了 GLxF 格式数值解振荡的可控性.

**关键词:** 对流扩散方程 GLxF 格式 振荡 可控性 Fourier 分析

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2011)02-0122-04

**Abstract:** GLxF scheme of convective-diffusion equation  $u_t + au_x = \epsilon u_{xx}$ ,  $a \in R, \epsilon > 0$ , is proposed, and its stability and convergence conditions is presented. Then the behavior of numerical solution of GLxF scheme is simulated. The results show that there are oscillations, of which three guesses of controllability are proposed. Finally, Fourier analysis is used to prove that the oscillations of numerical solution are controllable.

**Key words:** convective-diffusion equation, GLxF scheme, oscillations, controllability, Fourier analysis

目前, 有不少学者对微分方程数值解振荡的研究产生了极大的兴趣, 如文献[1, 2]研究对流方程的一些单调格式以及数值解的局部振荡, 文献[3]研究对流方程广义 Lax-Friedrichs (GLxF) 格式及其数值解产生振荡的原因, 文献[4]又在文献[3]的基础上研究对流方程 GLxF 格式数值解振荡的可控性. 所以, 寻找微分方程的一种稳定及实用的数值格式, 具有重要的理论和现实意义.

根据文献[4]的研究思路, 考虑对流扩散方程

$$u_t + au_x = \epsilon u_{xx}, a \in R, \epsilon > 0 \quad (1)$$

的 GLxF 格式. 由于该方程只是在对流方程的基础上增加了一个扩散项, 由此我们联想它是否也具有与对流方程一样的控制振荡的机理.

文献[3]提出了对流方程  $u_t + au_x = 0$  的 GLxF 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{av}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{q}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2)$$

其中  $v = \frac{\tau}{h}$  为网格比,  $\tau, h$  分别为时间和空间步长,  $q \in (0, 1]$ . 在格式(2)的基础上, 对方程(1)的扩散项  $\epsilon u_{xx}$  进行中心差分, 便可以建立对流扩散方程(1)的差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{av}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \left(\frac{q}{2} + \mu\right)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (3)$$

其中  $\mu = \frac{\epsilon\tau}{h^2}$ . (3)式称为对流扩散方程(1)的广义 GLxF 格式, 其中  $q$  与  $\epsilon$  分别称为数值粘性系数和物理粘性系数, 它们在控制数值解振荡方面扮演重要角色.

在网格比固定时, 通过 Fourier 分析<sup>[5]</sup> 易得 GLxF 格式的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ , 稳定条件为  $a^2 v^2 \leq q + 2\mu \leq 1$ , 收敛条件为  $q + 2\mu \leq 1$ . 本文通过图例说明对流扩散方程(1)的 GLxF 格式解存在振荡, 再根据数值仿真提出发生振荡的 3 个猜测, 并用

收稿日期: 2010-11-02

修回日期: 2011-01-17

作者简介: 沈柳平(1968-), 女, 讲师, 主要从事微分方程的研究。

Fourier 分析方法证明了 GLxF 格式数值解振荡的可控性。

## 1 对流扩散方程 GLxF 格式数值解的行为

对 GLxF 格式,用脉冲初始数据

$$u_j^0 = \begin{cases} 1, & j = M/2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

进行离散,其中  $M$  为网格点个数,这里  $M = 50$ .不妨设  $a = 0.5, T = 0.4$ ,空间长度  $x \in [0, 1]$ ,观察当 GLxF 格式的参数  $q, \epsilon, h$  变化时数值解的行为,结果如图 1~3.

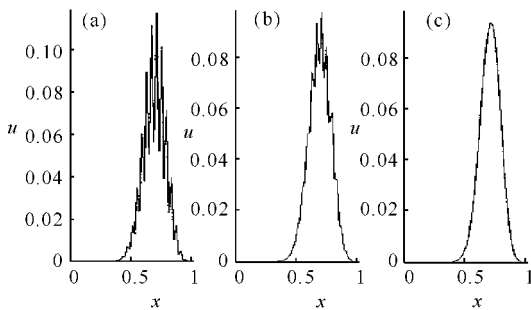


图 1 数值振荡与数值粘性的关系

Fig. 1 Relationship between numerical oscillation and numerical viscosity

(a)  $q = 0.82$ , (b)  $q = 0.8$ , (c)  $q = 0.7$

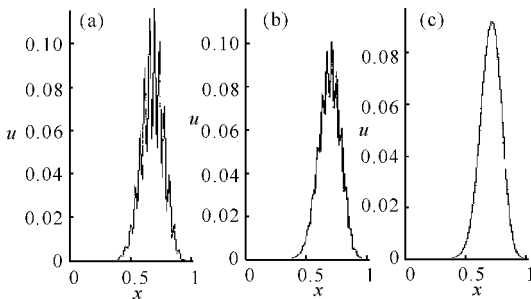


图 2 数值振荡与物理粘性的关系

Fig. 2 Relationship between numerical oscillation and physical viscosity

(a)  $v = 0.02$ , (b)  $v = 0.0058$ , (c)  $v = 0.005$

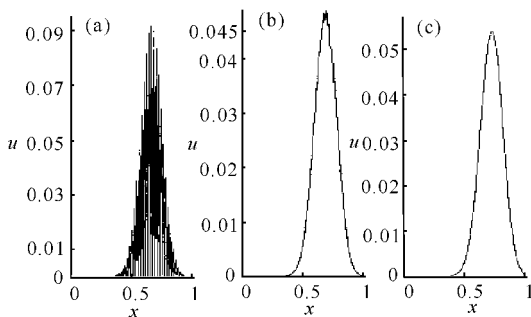


图 3 数值振荡与空间网格宽度的关系

Fig. 3 Relationship between numerical oscillation and width of mesh

(a)  $M = 100$ , (b)  $M = 95$ , (c)  $M = 80$

(i) 设网格比  $c = \nu = \frac{\tau}{h} = 0.8, q = 0.82, v = \epsilon = 0.002$ , 则数值解(图 1(a))显示有明显的振荡;若设  $q = 0.8$ , 其他参数均不变,数值解(图 1(b))显示仍然有振荡,但振荡减弱;若  $q = 0.7$ , 其他参数不变,数值解(图 1(c))显示振荡消失。

(ii) 设网格比  $c = \nu = \frac{\tau}{h} = 0.8, q = 0.5, v = \epsilon = 0.006$ , 数值解(图 2(a))显示有明显的振荡;若设  $v = \epsilon = 0.0058$ , 其他参数均不变,则数值解(图 2(b))显示仍然有振荡,但振荡减弱;若  $v = \epsilon = 0.005$ , 其他参数不变,则数值解(图 2(c))显示振荡消失。

(iii) 设网格比  $c = \nu = \frac{\tau}{h} = 0.5, q = 0.5, v = \epsilon = 0.005$ , 网格宽度  $h = 0.01$  (即网格点个数  $M = 100$ ), 则数值解(图 3(a))显示有明显的振荡;若设  $h = 0.010526$  (即网格点个数  $M = 95$ ), 其他参数均不变,则数值解(图 3(b))显示振荡减弱;若设  $h = 0.0125$  (即网格点个数  $M = 80$ ), 其他参数均不变,则数值解(图 3(c))显示振荡消失。

由(i)、(ii)、(iii)结果,分别作以下猜测:

猜测 1 对流扩散方程 GLxF 格式数值解发生了振荡,振荡与数值粘性系数  $q$  有关,当  $q$  减小时,振荡减弱,直至振荡消失。

猜测 2 对流扩散方程 GLxF 格式数值解发生了振荡,振荡与物理粘性系数  $\epsilon$  有关,当  $\epsilon$  减小时,振荡减弱,直至振荡消失。

猜测 3 对流扩散方程 GLxF 格式数值解发生了振荡,振荡与网格宽度  $h$  有关,当  $h$  增大时,振荡减弱,直至振荡消失。

## 2 对流扩散方程 GLxF 格式数值解振荡的可控性

### 2.1 GLxF 格式数值解产生振荡的原因

设 GLxF 格式  $n$  个时间步后的波型解为

$$u_k^n = \lambda_k^n e^{i\xi} = [\lambda(k)]^n e^{i\xi}, i^2 = -1, \xi = 2\pi kh, \quad (4)$$

其中  $\lambda_k^n$  为解的振幅,而

$$\lambda(k) = \frac{\lambda_k^{n+1}}{\lambda_k^n}$$

为波型解一个时间步的振幅。

为方便研究,把 GLxF 格式的数值解  $u_j^n$  分解成低频波型解  $(U^s)_j^n$  (当  $\xi = 0$  时)及高频波型解  $(U^h)_j^n$  (当  $\xi = \pi$ ),即

$$u_j^n = (U^s)_j^n + (U^h)_j^n, \quad (5)$$

将低频波型解  $(U^s)_j^n := \lambda_k^n e^{i\xi j}, \xi \approx 0$  代入 GLxF 格式(3),可得

$$\lambda(k) = 1 - (q + 2\mu)(1 - \cos \xi) - iav \sin \xi. \quad (6)$$

### 2.1.1 低频波型的耗散误差

记  $\lambda(k)$  为  $\lambda$ , 由(6)式可得

$$|\lambda|^2 = 1 - (1 - \cos \xi)[2(q + 2\mu) - (q + 2\mu)^2(1 - \cos \xi) - a^2v^2(1 + \cos \xi)], \quad (7)$$

将  $\cos \xi = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + \dots$  代入(7)式, 可得

$$|\lambda|^2 = 1 - \frac{1}{2}\xi^2[2(q + 2\mu) - (q + 2\mu)^2 \frac{\xi^2}{2} - a^2v^2(2 - \frac{1}{2}\xi^2)] + \dots = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 \cdot 2(q + 2\mu) + \frac{1}{4}\xi^4(q + 2\mu)^2 + \frac{a^2v^2\xi^2}{2}(2 - \frac{\xi^2}{2}) + \dots = 1 - (q + 2\mu - a^2v^2)\xi^2 + \frac{1}{4}[(q + 2\mu)^2 - a^2v^2]\xi^4 + \dots,$$

则当  $1 \geq q + 2\mu > a^2v^2$  时,  $|\lambda| < 1$ , 耗散误差的阶为  $O(\xi)$ , 而且随着  $q + 2\mu$  的增大, 数值耗散加强.

再者, 由(7)式可得

$$\frac{d(|\lambda|^2)}{d(q + 2\mu)} = 2[1 - (q + 2\mu)(1 - \cos \xi)] \cdot$$

$$(\cos \xi - 1) < 0,$$

由此可以看出当  $q + 2\mu$  增大时, 数值耗散加强.

那么, 当  $q + 2\mu$  增大时, 数值耗散加强, 则数值解振荡减弱, 这似乎与第 2 节的数值图例所表现出的数值解的行为不一致. 其实, 由相对相位误差与耗散误差的阶的比较就可以知道, 数值解的振荡不是由低频波型产生的.

### 2.1.2 低频波型的相对相位误差

由于扩散项(二阶导数项)不影响波型解的相位, 则可定义 GLxF 格式数值解的一个时间步长的相对相位误差为

$$E_p(k) := -\frac{\arg \lambda}{av\xi} - 1.$$

由(6)式可得

$$\arg \lambda = -\tan^{-1} \frac{av \sin \xi}{1 - (q + 2\mu)(1 - \cos \xi)},$$

将  $f(\xi) := \frac{av \sin \xi}{1 - (q + 2\mu)(1 - \cos \xi)}$  在  $\xi = 0$  处进行泰勒展开, 可得

$$f(\xi) = av\xi + \frac{av}{6}(6\mu + 3q - 1)\xi^3 + \dots,$$

再根据文献[6]的引理 4.1, 可得

$$\arg \lambda = -\tan^{-1} f(\xi) = -\tan^{-1} [av\xi + \frac{av}{6}(6\mu + 3q - 1)\xi^3 + \dots] \approx -[av\xi + (av\mu + \frac{avq}{2} - \frac{av}{6} - \frac{a^3v^3}{3})\xi^3 + \dots] = -av\xi [1 + (\mu + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6} - \frac{a^2v^2}{3})\xi^2 +$$

$\dots]$ ,

则相对相位误差

$$E_p(k) = (\mu + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6} - \frac{a^2v^2}{3})\xi^2 + \dots = \frac{1}{6}[3(q + 2\mu) - (1 + 2a^2v^2)]\xi^2 + \dots.$$

当  $a^2v^2 \leq q + 2\mu \leq 1$  时,  $3(q + 2\mu) - (1 + 2a^2v^2)$  可取到 0, 所以 GLxF 格式的相对相位误差的阶至少为  $O(\xi^2)$ .

由上述分析可知, 低频波型的耗散误差的阶  $O(\xi)$  小于相对相位误差的阶  $O(\xi^2)$ , 所以数值耗散能够有效地抑制由相对相位误差所导致的数值解的振荡. 实际上, 当  $\xi \approx 0$  时, 由(7)式可知, 低频波型解一个时间步的振幅的模  $|\lambda| \approx 1$ , 即低频波型解能够很好地逼近精确解, 这说明低频波型解不产生振荡. 所以, 结合(5)式可知, 在第 2 节的数值图例中表现的 GLxF 格式数值解的振荡是由高频波型解产生.

## 2.2 GLxF 格式数值解振荡可控性

**定理 1** 当  $\frac{1}{2} < q + 2\mu < 1$  时, 对流扩散方程

GLxF 格式数值解的振荡随着数值粘性系数  $q$  或者物理粘性系数  $\epsilon$  的减小而减弱, 当  $q + 2\mu = 1$  时, 数值耗散最弱, 数值解出现最高频的棋盘波型解  $(-1)^{j+n}$  在  $-1$  与  $1$  之间强烈地振荡; 当  $q + 2\mu = \frac{1}{2}$  时, 数值耗散最强, 数值解的振荡消失.

**证明** 为了将高频波型解转化成类似于低频波型解情形的研究, 先作一个变换  $\xi = \pi + \xi'$ , 即若  $\xi' = 2\pi k'h$ , 就有  $kh = \frac{1}{2} + k'h$ , 于是  $\xi' \approx 0$ . 则高频波型解

$$(U^h)_j^n = \lambda_k^n e^{ikj} = \lambda_k^n e^{i(\pi + \xi')j} = (-1)^{j+n} \lambda_k^n e^{i\xi'j} = (-1)^{j+n} \lambda'^n e^{i\xi'j}, \quad (8)$$

这里  $\lambda_k^n = (-1)^{j+n} e^{in\xi} \lambda_k^n$ . 设  $(U^O)_j^n := \lambda_k^n e^{i\xi'j}$ , 则  $(U^h)_j^n = (-1)^{j+n} (U^O)_j^n$ , 其中因子  $(U^O)_j^n$  可以看成是棋盘波型解  $(-1)^{j+n}$  的一个振幅扰动.

将高频波型解  $(U^h)_j^n = (-1)^{j+n} \lambda'^n e^{i\xi'j}$  代入 GLxF 格式(3), 可得

$$\lambda' = -1 + (q + 2\mu)(1 + \cos \xi') - iav \sin \xi'. \quad (9)$$

由此得

$$|\lambda'|^2 = [-1 + (q + 2\mu)(1 + \cos \xi')]^2 + a^2v^2 \sin^2 \xi', \quad (10)$$

那么

$$\frac{d|\lambda'|^2}{dq} = 2[-1 + (q + 2\mu)(1 + \cos \xi')] \cdot (1 +$$

$\cos \xi') = 2(1 + \cos \xi')[-1 + (q + 2\mu)(1 + \cos \xi')]$ .  
 当  $\frac{1}{2} < q + 2\mu < 1$  时, 有  $\frac{d|\lambda'|^2}{dq} > 0$ . 由此可知, 当  $q$  减小时, 扰动因子对棋盘波型解的耗散加强, 从而数值解的振荡减弱.

设  $r = \frac{\tau}{h^2}$  为常数, 由(10)式可得

$$|\lambda'|^2 = [-1 + (q + 2r\epsilon)(1 + \cos \xi')]^2 + a^2 v^2 \sin^2 \xi',$$

那么

$$\frac{d|\lambda'|^2}{d\epsilon} = 2[-1 + (q + 2r\epsilon)(1 + \cos \xi')] \cdot$$

$$2r(1 + \cos \xi') = 4r(1 + \cos \xi')[-1 + (q + 2r\epsilon)(1 + \cos \xi')].$$

当  $\frac{1}{2} < q + 2\mu < 1$  时 (即  $\frac{1}{2} < q + 2r\epsilon < 1$ ), 有

$$\frac{d|\lambda'|^2}{d\epsilon} > 0.$$

由此可知, 当  $\epsilon$  减小时, 扰动因子对棋盘波型解的耗散加强, 从而数值解的振荡减弱.

另一方面, 将  $\cos \xi = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + \dots$  代入(10)式, 可得

$$|\lambda'|^2 = [1 - 2(q + 2\mu)]^2 + [(q + 2\mu) - 2(q + 2\mu)^2 + a^2 v^2] \xi'^2 + \frac{1}{4}[(q + 2\mu)^2 - a^2 v^2] \xi'^4 + \dots,$$

由此可知, 当  $q + 2\mu = \frac{1}{2}$  时, 耗散误差的阶为  $O(\xi')$ .

此时  $|\lambda'| \approx 0$ , 数值耗散最强, 数值解没有振荡. 除此之外 ( $1 > q + 2\mu \neq \frac{1}{2}$ ), 耗散误差的阶为  $O(1)$ , 并且  $|\lambda'| < 1$ , 数值解有振荡.

再者, 当  $\frac{1}{2} < q + 2\mu < 1$  时, 由(10)式可得

$$\frac{d(|\lambda'|^2)}{d(q + 2\mu)} = 2(1 + \cos \xi')[-1 + (q + 2\mu)(1 + \cos \xi')] > 0,$$

即随着  $q + 2\mu$  的减小, 数值耗散增强, 数值解的振荡减弱. 当  $q + 2\mu = 1$  时, 数值耗散最弱, 结合(10)式可知, 数值解出现最高频的棋盘波型解  $(-1)^{j+n}$  在  $-1$  与  $1$  之间强烈地振荡; 当  $q + 2\mu = \frac{1}{2}$  时, 数值耗散最强, 结合(10)式可知  $|\lambda'| \approx 0$ , 数值解的振荡消失.

**定理 2** 当  $\frac{1}{2} < q + 2\mu < 1$  时, 对流扩散方程

GLxF 格式数值解的振荡随着网格宽度  $h$  的增大而减弱.

证明 类似定理 1 的证明, 同样将高频波型解转化成低频波型解来研究.

设网格比  $\nu = \frac{\tau}{h}$  为常数, 网格宽度  $h$  为变量, 由(10)式, 可得

$$|\lambda'|^2 = [-1 + (q + \frac{2\nu\epsilon}{h})(1 + \cos \xi')]^2 + a^2 v^2 \sin^2 \xi',$$

那么

$$\frac{d|\lambda'|^2}{dh} = 2[-1 + (q + \frac{2\nu\epsilon}{h})(1 + \cos \xi')] \cdot 2\nu\epsilon(1 + \cos \xi') \cdot (-\frac{1}{h^2}) = -\frac{4\nu\epsilon(1 + \cos \xi')}{h^2}[-1 + (q + \frac{2\nu\epsilon}{h})(1 + \cos \xi')].$$

当  $\frac{1}{2} < q + 2\mu < 1$  时 (即  $\frac{1}{2} < q + \frac{2\nu\epsilon}{h} < 1$ ), 有

$$\frac{d|\lambda'|^2}{dh} < 0.$$

由此可知, 当网格宽度  $h$  增大时, 扰动因子对棋盘波型解的耗散加强, 从而数值解的振荡减弱.

参考文献:

- [1] Tang H Z, Warnecke G. A note on  $(2k + 1)$ -point conservative monotone scheme[J]. M2AN Math. Model Numer Anal, 2004, 38: 345-357.
- [2] Ercilia S. Finite difference approximations for a fractional advection diffusion problem [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228: 4038-4054.
- [3] Li J Q, Tang H Z, Warnecke G, et al. Local oscillations in finite difference solutions of hyperbolic conservation laws[J]. Mathematics of Computation, 2009, 78: 1997-2018.
- [4] 杨继昌, 沈柳平. 对流方程 GLxF 格式数值解振荡的可控性[J]. 广西科学院学报, 2010, 26(1): 9-12.
- [5] Eswaran De A K V. Analysis of a new high resolution upwind compact scheme[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 218: 398-416.
- [6] Morton K W, Mayers D F. 偏微分方程数值解[M]. 李治平, 门大力, 许现民, 等译. 第 2 版. 北京: 人民邮电出版社, 2006.

(责任编辑: 尹 闯)