DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.02.013

6p 阶二面体群的弱 3-CI 性
Weak 3-CI Property of Dihedral Groups of Order 6p

覃建军[1],王　飞[2],陈　康[3]
QIN Jian-jun[1],WANG Fei[2],CHEN Kang[3]

(1. 南宁市第十五中学,广西南宁　530003;2. 新疆农业大学数理学院,新疆乌鲁木齐　830052;3. 南宁市第三中学,广西南宁　530021)
(1. 15th Middle School of Nanning,Nanning,Guangxi,530003,China;2. College of Mathematics and Physics of Xinjiang Agricultural University,Urumchi,Xinjiang,830052,China;3. 3rd Middle School of Nanning,Nanning,Guangxi,530021,China)

摘要:利用图和群的方法,证明 6p 阶二面体群是弱 3-CI 群,并决定了它连通 3 度 Cayley 图的完全分类,得出 6p 阶二面体群可以分为 $\frac{1}{2}(3p+1)$ 类互不同构的 Cayley 图.

关键词:二面体群　弱 3-CI 群　Cayley 图　图同构
中图法分类号:O157　　文献标识码:A　　文章编号:1005-9164(2011)02-0110-03

Abstract:We prove that the dihedral groups of order 6p are a weak 3-CI group,and determine the complete classification of its connected Cayley graphs of valencies 3. The dihedral groups of order 6p can be divided into $\frac{1}{2}(3p+1)$ among different types of Cayley graph.

Key words:dihedral group,weak 3-CI group,Cayley graph,graph isomorphisms

Cayley 图同构问题(即 CI 性)的研究起源于 1967 年. 近 40 多年来,有关 Cayley 图 CI 性的研究很多,也有很多的难题未能解决. 由文献[1～4]我们知道,CI-群是非常稀少的,所以人们转而研究小度数的情况,即 m- CI-群[5～7],或者只研究连通的情况,即弱 m- CI-群[7～10].

本文主要采用群与图的方法,决定了 6p(p 是不小于 3 的素数)阶二面体群的连通 3 度 Cayley 图的完全分类,并证明它是弱 3-CI- 群. 6p 阶二面体群 G 的构造如下:

$$G=\langle a,b\mid a^{3p}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle. \quad (0.1)$$

若无特殊说明,本文所指的 6p 阶二面体群 G 均形如(0.1)式. 文中未定义而引用的群论及代数图论方面的概念可参阅文献[9～11],所涉及的图都是有限、连通、简单、无向图.

1　定义及引理

对一个图 X,其顶点集记作 $V(X)$,边集记作 $E(X)$. $V(X)$ 到自身并保持边不变的双射(即置换)全体关于映射的乘法构成一个群,称为图 X 的全自同构群,记作 $\mathrm{Aut}(X)$,而用 A_v 或 $A_v(X)$ 表示 $A=\mathrm{Aut}(X)$ 在点 v 的稳定子群. 如果 $\mathrm{Aut}(X)$ 作用在 $V(X)$(或 $E(X)$)上传递,则称 X 是点(或边)传递图. 通过群我们容易构造具有一定对称性的图.

设 G 是一个有限群,取 $S\subseteq G\backslash\{1\}$,满足 $S^{-1}=S$(这样的 S 称为 G 的 Cayley 子集). 则群关于其 Cayley 子集 S 的 Cayley 图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 的定义为

$$V(X)=G,E(X)=\{(g,sg)\mid g\in G,s\in S\}.$$

由定义易知

(1)G 的单位元 1 的邻域为 $N(1)=S$.

(2)X 连通当且仅当 $G=\langle S\rangle$.

(3) 由于 G 的右正则表示 $R(G)\leqslant\mathrm{Aut}(X)$,$A=R(G)A_1$,所以 Cayley 图都是点传递图.

(4) 如果 $R(G)\trianglelefteq A$,则称 X 为 G 的正规 Cayley 图. 此时 $A=R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$,其中 $\mathrm{Aut}(G,S)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(G)\mid S^\sigma=S\}$. 显然 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 为 G 的正规 Cayley 图当且仅当 $A_1=\mathrm{Aut}(G,S)$.

定义 1.1　设 G 是有限群,S 是 G 的一个 Cayley 子集. 若另有 Cayley 子集 T 使 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,T)$ 时,必存在 $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$ 使 $S^\alpha=T$,则称 S 为 G 的 CI- 子集. 如果 G 的所有 Cayley 子集都是 CI 的,则称 G 为 CI -群;如果 G 的所有势不超过某正整数 m 的

收稿日期:2010-07-07
修回日期:2011-01-06
作者简介:覃建军(1963-),男,中学高级教师,硕士,主要从事代数图论与数学教学的研究。

Cayley 生成子集都是 CI 的，则称 G 为弱 m-CI -群.

定义 1.2 设 G 是有限群，S,T 是 $G\backslash\{1\}$ 的非空子集.

(1) 如果存在 $\alpha\in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $S^{\alpha}=T$，则称 S 与 T 共轭，记为 $S\approx T$；

(2) 如果 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong \mathrm{Cay}(G,T)$，则称 S 与 T 等价，记为 $S\sim T$.

设 $S,T\subseteq G\backslash\{1\}$，则记

$\mathrm{Aut}(S,T)=\{\sigma\in \mathrm{Aut}(G)\mid S^{\sigma}=T\}$，$\mathrm{Iso}(S,T)=\{\sigma\mid \mathrm{Cay}(G,S)\cong \mathrm{Cay}(G,T),1^{\sigma}=1\}$.

利用 Cayley 图的点传递性可得 $\mathrm{Iso}(S,T)\neq\varnothing$ 当且仅当 $S\sim T$. 显然 $\mathrm{Iso}(S,S)=A_1$，$\mathrm{Aut}(S,S)=\mathrm{Aut}(G,S)$，$\mathrm{Aut}(S,T)\subseteq \mathrm{Iso}(S,T)$.

定义 1.3 设 S 是 $G\backslash\{1\}$ 的非空子集. 如果对任意的 $T\sim S$ 都有 $\mathrm{Aut}(S,T)=\mathrm{Iso}(S,T)$，则称 S 为 G 的强 CI -子集.

若 S 是 G 的强 CI -子集，则有 $\mathrm{Aut}(G,S)=\mathrm{Aut}(S,S)=\mathrm{Iso}(S,S)=A_1$，因而 Cayley 图必为正规 Cayley 图.

定义 1.4 设 $s\in S\subseteq G\backslash\{1\}$，如果对任意 $\sigma\in \mathrm{Iso}(S,S)$ 都有 $s^{\sigma}=s$，则称 s 为 S 的不动点.

引理 1.1 设 G 是 $6p$ 阶二面体群，即 $G=\langle a,b\mid a^{3p}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ 则

(1) $b^ja^{i}=a^{i(-1)^j}b^j$；

(2) $(b^ja^i)(b^sa^t)=b^{j+s}a^{i(-1)^s+t}$；

(3) $G\backslash\{1\}$ 的全体元素按阶可分为 4 个部分，其中 2 阶元共有 $3p$ 个：$ba^i,i=0,1,\cdots,3p-1$；3 阶元共有 2 个：a^p,a^{2p}；p 阶元共有 $p-1$ 个：$a^{3i},i=1,2,\cdots,p-1$；$3p$ 阶元共有 $2p-2$ 个：$a^{3i+1},a^{3j+2},i,j=0,1,\cdots,p-1,i\neq\frac{1}{3}(2p-1)$，$j\neq\frac{1}{3}(p-2)$.

证明 (1) 由 $b^2=1$，得 $j=0,1$. 当 $j=0$ 时结论 (1) 显然成立. 当 $j=1$ 时，由 $ba=a^{-1}b$ 得 $ba^i=baa^{i-1}=a^{-1}ba^{i-1}=a^{-2}ba^{i-2}=\cdots=a^{-i}b$，即结论(1) 也成立.

(2) 由 $b^2=1$，得 $b^j=b^{-j}$. 这时结论(1) 可以化为 $a^ib^{-j}=b^{-j}a^{i(-1)^j}$，即 $a^ib^j=b^ja^{i(-1)^j}$，因此 $(b^ja^i)(b^sa^t)=b^j(a^ib^s)a^t=b^jb^sa^{i(-1)^s}a^t=b^{j+s}a^{i(-1)^s+t}$.

(3) 由 G 的定义关系即得结论成立.

引理 1.2 设 G 为 $6p$ 阶二面体群，则 G 的每个自同构 α 都唯一地被 $u(0\leqslant u<3p,(u,3p)=1)$ 和 $v(0\leqslant v\leqslant 3p-1)$ 决定，即

$$\alpha\begin{cases}a\to a^u,\\ b\to ba^v.\end{cases}$$

反之，由上式诱导的映射是群 G 的一个自同构.

证明 设 $\alpha\in \mathrm{Aut}(G)$，则 $o(a^{\alpha})=3p$，$o(b^{\alpha})=2$. 由引理 1.1 知，存在唯一的 $u(0\leqslant u<3p,(u,3p)=1)$ 和 $v(0\leqslant v\leqslant 3p-1)$ 使 $a^{\alpha}=a^u$，$b^{\alpha}=ba^v$.

反之，记 $x=a^u$，$y=ba^v$. 显然 $a,b\in\langle x,y\rangle$，由 $y^{-1}xy=(ba^v)^{-1}a^uba^v=a^{-v}(b^{-1}a^ub)a^v=a^{-v}a^{-u}a^v=a^{-v}a^{-u}a^v=a^{-u}=x^{-1}$ 知，x,y 仍满足生成关系，所以 α 是群 G 的自同构.

引理 1.3 设 G 是 $6p$ 阶二面体群，即 $G=\langle a,b\mid a^{3p}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$，则群 G 是弱 2-CI 群.

证明 设 S,T 是群 G 的不含单位元 1 的 Cayley 子集，即 $S=S^{-1}$，$T=T^{-1}$，$|S|=|T|=2$，$G=\langle S\rangle=\langle T\rangle$. 假设 $X:=\mathrm{Cay}(G,S)\cong Y:=\mathrm{Cay}(G,T)$. 需证明 $\exists\alpha\in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $S^{\alpha}=T$.

(1) S 中含一对互逆的元. 设 $S=\{s,s^{-1}\}$. 由 $G=\langle S\rangle\Rightarrow G$ 为循环群，矛盾.

(2) S 中含 2 个不相同的 2 阶元.

若 $S=\{b,ba^i\}$，则可以设 $T=\{b,ba^j\}$. 由 $G=\langle S\rangle=\langle T\rangle$ 易知，i,j 为一奇一偶且 $0\leqslant i,j\leqslant 3p-1$，$(i,3p)=1$，$(j,3p)=1$. 记 $S_1=\{b,ba\}$，令 $\alpha:a\to a^{-i},b\to ba^i$，则由引理 1.2 知，$\alpha$ 诱导的映射是群 G 的自同构，且有 $S_1^{\alpha}=S$. 再令 $\beta:a\to a^j,b\to b$，则由引理 1.2 知，β 诱导的映射也是群 G 的自同构，且有 $S_1^{\beta}=T$. 因此 $\exists\alpha^{-1}\beta\in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $S^{\alpha^{-1}\beta}=T$.

引理 1.4[9] 设 s 是 S 的不动点，$T\sim S$.

(1) 存在 $t\in T$，使得对任意 $\sigma\in \mathrm{Iso}(S,T)$ 都有 $s^{\sigma}=t$；

(2) 若 $\sigma\in \mathrm{Iso}(S,T)$，$g\in G$，则 $(sg)^{\sigma}=s^{\sigma}g^{\sigma}=t\,g^{\sigma}$；

(3) $\mathrm{Iso}(S,T)\subseteq \mathrm{Iso}(S\backslash\{s\},T\backslash\{t\})$，即 $S\backslash\{s\}\sim T\backslash\{t\}$；

(4) $|s|=|t|$.

引理 1.5 设 G 为 $6p$ 阶二面体群，则 G 的任一个 2 元生成子集都是强 CI -子集.

与文献[9]引理 6 的证明类似，故省略证明.

引理 1.6[9] 设 s 是 S 的不动点，并且 $S\backslash\{s\}$ 是 G 的强 CI -子集，则 S 也是 G 的强 CI -子集.

2 主要结果

为了叙述方便，给出如下记号：设 $X_i=\mathrm{Cay}(G,S_i)$ 是群 G 关于 $S_i\subseteq G\backslash\{1\}$ 的 Cayley 图. 对任意自然数 k 和 $g\in V(X)=G$，记 $S_k(g)=\{s_1s_2\cdots s_kg\mid s_1,s_2,\cdots,s_k\in S\}$.

容易验证 $S_1(g)=Sg$，$S_{k+1}(g)=SS_k(g)$，并且顶点 g 到 $S_k(g)$ 中每个顶点 $s_1s_2\cdots s_kg$ 都有一条长为 k 的有向路，通常称 $S_k(g)$ 为顶点 g 的 k 步(出)邻域.

定理 2.1 若 $S\subseteq G\backslash\{1\}$，是 G 的 3 元 Cayley 子集，则 S 与下述两种类型中所列的某个 Cayley 子集 S_i 共轭：

(Ⅰ) 含一个 2 阶元和 2 个 $3p$ 阶元 $S_1=\{b,a,$

$a^{-1}\}$;

（Ⅱ）含 3 个 2 阶元 $S_i=\{b,ba,ba^i\},i=2,3,\cdots,\frac{1}{2}(3p-1)$.

证明 由引理 1.1 知，$G\backslash\{1\}$ 的全体元素按阶可分为 4 个部分. 由 $S=S^{-1}$，$|S|=3,G=\langle S\rangle$ 知，S 至少有一个 2 阶元. 故 $S=\{ba^i,s,s^{-1}\},i=0,1,\cdots,3p-1$. 这时，分 2 种情形讨论：

（Ⅰ）S 含一个 2 阶元和 2 个 $3p$ 阶元.

不妨设 $s=a^u(u=1,\cdots,3p-1,(u,3p)=1)$. 由引理 1.2 知，$S$ 与 $S_1=\{b,a,a^{-1}\}$ 共轭.

（Ⅱ）S 含 3 个 2 阶元.

设 $S=\{ba^i,ba^j,ba^k\},i,j,k\in\{0,1,2,3,\cdots,2p-1\}$ 且 $i\neq j\neq k$，由引理 1.2 知，S 与 $\{b,ba,ba^i\}(i=2,3,\cdots,2p-1)$ 共轭，且 $\exists\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$ 使得 $\{b,ba,ba^i\}^\alpha=\{ba^v,ba^{u+v},ba^{iu+v}\}$，令 $u=3p-1,v=1$，得 $\{b,ba,ba^i\}^\alpha=\{b,ba,ba^{-i+1}\}$，即 $\{b,ba,ba^i\}$ 与 $\{b,ba,ba^{-i+1}\}$ 共轭，其中 $i=2,3,\cdots,3p-1$. 因此得到 $\frac{1}{2}(3p-1)$ 个共轭类：$S_k=\{b,ba,ba^k\},k=2,3,\cdots,\frac{1}{2}(3p+1)$.

综上所述，$G\backslash\{1\}$ 的互不共轭的 3 元 Cayley 子集共有 $\frac{1}{2}(3p+1)$ 类，各自的代表元为 $S_1=\{b,a,a^{-1}\},S_k=\{b,ba,ba^k\},k=2,3,\cdots,\frac{1}{2}(3p+1)$. 即 $S_1,S_2,\cdots,S_{\frac{1}{2}(3p+1)}$ 互不共轭.

定理 2.2 设 G 是 $6p$ 阶二面体群，即 $G=\langle a,b\mid a^{3p}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$，则群 G 的 3 元 Cayley 子集都是 CI－子集，即 G 是弱 3-CI－群.

证明 情形(1) $S_1=\{b,a,a^{-1}\}$ 是 CI－子集. 要证 $S_1=\{b,a,a^{-1}\}$ 是 CI－子集，只需证明，如果 $T\sim S_1$，那么 $T\approx S_1$.

设 $T\sim S_1,\sigma\in\mathrm{Iso}(S_1,T)$. 这时，通过计算可得 $S_1(b)=\{1,ba,ba^{-1}\},S_1(a)=\{1,ba,a^2\},S_1(a^{-1})=\{1,ba^{-1},a^{-2}\}$，$|S_1(b)\cap S_1(a)|=|\{1,ba\}|=2$；$|S_1(b)\cap S_1(a^{-1})|=|\{1,ba^{-1}\}|=2$；$|S_1(a)\cap S_1(a^{-1})|=|\{1\}|=1$.

由此可知 $s=b$ 是 S_1 的不动点，由引理 1.4 得，$|b^\sigma|=|b|=2,S_1\backslash\{b\}\sim T\backslash\{b^\sigma\}$.

因为 $\langle S_1\backslash\{b\}\rangle\cong Z_{3p}$ 是 2-DCI 群，所以 $\exists\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$ 使 $(S_1\backslash\{b\})^\alpha=\{a^\alpha,(a^{-1})^\alpha\}=T\backslash\{b^\sigma\}$. 设 $a^\alpha=a^u$，则 $(a^{-1})^\alpha=a^{-u},(u,3p)=1$. 又由于 b^σ 是 2 阶元，可以设 $b^\sigma=ba^v,v\in\{0,1,2,\cdots,3p-1\}$，于是 $T=\{ba^v,a^u,a^{-u}\}$. 因此由 $a\to a^u,b\to ba^v$ 诱导出的群 G 的自同构 τ 满足 $S_1^\tau=T$，从而有 $T\approx S_1$，即 S_1 为 CI-子集.

情形(2) $S_i=\{b,ba,ba^i\}(i=2,3,\cdots,\frac{3}{2}(p-1))$ 是 CI－子集.

记 $V(X)$ 中元素 v 的邻域为 $N(v)$，则单位元 1 的邻域为 $N(1)=S_i=\{b,ba,ba^i\},i\in\{2,3,\cdots,\frac{3}{2}(p-1)\}$. 假设 $\sigma\in A_1$，且 $b^\sigma=ba^i$，则 $(N(b))^\sigma=N(ba^i)$，即 $\{a^{-1},a^{-i}\}^\sigma=\{a^{i-1},a^i\}$. 由于 $N(a^i)\cap N(a^{1-i})=\{ba^{i+1},ba^{2i},ba^i\}\cap\{ba^{1-i},ba^{2-I},ba\}=\varnothing$，若 $(a^{-1})^\sigma=a^{i-1}$，则 $(a^{-i})^\sigma=a^i$，必有 $(ba^{1-i})^\sigma\in N(a^i)$，与 $(ba^{1-i})^\sigma\in N(a^{1-i})$ 矛盾. 由于 $N(a^{i-1})\cap N(a^{1-i})=\{ba^{i-1},ba^{2i-1},ba^i\}\cap\{ba^{1-i},ba^{2-i},ba\}=\varnothing$，若 $(a^{-1})^\sigma=a^i$，则 $(a^{-i})^\sigma=a^{i-1}$，必有 $(ba^{1-i})^\sigma\in N(a^{i-1})$，与 $(ba^{1-i})^\sigma\in N(a^{1-i})$ 矛盾. 故 $b^\sigma\neq ba^i$. 同理可证 $(ba)^\sigma\neq ba^i,b^\sigma\neq ba$. 由此可知 b,ba,ba^i 都是 S_i 的不动点. 考虑 $s=ba^i$ 这个不动点，这时 $S_i\backslash\{s\}=\{b,ba\}$ 是 G 的 2 元生成子集，由引理 1.5，它还是强 CI-子集，再有引理 1.6 得 $S_i(i\in\{2,3,\cdots,\frac{1}{2}(3p+1)\}$ 是 CI－子集

综上所述，群 G 的 3 元 Cayley 子集都是 CI－子集，即 G 是弱 3-CI－群. 这样，群 G 可分为 $\frac{1}{2}(3p+1)$ 类互不同构的 Cayley 图.

参考文献：

[1] Xu M Y. Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs[J]. Discrete Math, 1998, 182: 309-319.

[2] Muzychuk M. Adam's conjecture is true in the square-free case[J]. J Combin Theory(A), 1995, 72: 118-134.

[3] Muzychuk M. On Adam's conjecture for circulant graphs[J]. Disc Math, 1997, 167/168: 497-510.

[4] Li C H. Isomorphisms of finite Cayley graphs[D]. Ph D Thesis at University of Western Australia, 1997.

[5] 孙良. 无向循环图的同构[J]. 数学年刊, 9A, 1988, 5: 567-574.

[6] Ma H C. On isomorphisms of Cayley digraphs on dicyclic groups[J]. Austra J of Combin, 1997, 16: 189-194.

[7] 方新贵. 有限交换 2-DCI-群的刻画[J]. 数学杂志, 1988, 8: 315-317.

[8] 黄琼湘. Cayley 图的同构分解及弱 DCI 子集的充要条件[J]. 数学研究与评论, 1998, 18(2): 281-284.

[9] 王殿军，胡冠章，徐尚进. 21 阶亚循环群的弱 3-DCI 性[J]. 系统科学与数学, 2001, 21: 235-242.

[10] 徐明耀，黄建华，李慧陵，等. 有限群导引：上下册[M]. 北京：科学出版社, 1999.

[11] Li C H. On isomorphisms of connected Cayley graphs Ⅱ[J]. J Combin Theory Ser B, 1998, 74: 28-34.

（责任编辑：尹　闯）